Relácie ekvivalencie

Relácia na množine M je ľubovoľná podmnožina $R \subseteq M \times M$. Relácia ekvivalencie je taká relácia, ktorá je

- reflexívna: $(\forall x \in M)\ (x, x) \in R$;
- symetrická: $(\forall x, y \in M)\ (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$;
- tranzitívna: $(\forall x, y, z \in M)\ (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$

Trieda ekvivalencie:

$$[x] = \{y \in M; (x, y) \in R\}$$

Triedy ekvivalencie tvoria rozklad, t.j.

$$[x] \cap [y] \neq \emptyset \Rightarrow [x] = [y]$$
$$\bigcup_{x \in M} [x] = M$$

Obrátene, z rozkladu vieme dostať reláciu ekvivalencie.

Úloha 1. Nech pre každé $i \in I$ je R_i relácia ekvivalencie na množine A. Ukážte, že potom aj $R = \bigcap_{i \in I} R_i$ je relácia ekvivalencie na množine A. Dá sa nejako vyjadriť $[a]_R$ pomocou $[a]_{R_i}$? (T.j. ak poznáme triedu prvku a v každej z relácií ekvivalencie R_i, $i \in I$, vieme nejako zistiť aká bude trieda tohoto prvku v relácie ekvivalencie R?)

Úloha 2. Ak R_1 a R_2 sú relácie ekvivalencie, je aj $R_1 \cup R_2$ relácia ekvivalencie?

Úloha 3. Overte, či relácia R je relácia ekvivalencie na množine M.
a) M je ľubovoľná množina, $R = M \times M$;
b) M je ľubovoľná množina, $R = \{(x, x); x \in M\}$
c) $M = \mathbb{R}$, $R = \{(x, y) \in M \times M; x - y \in \mathbb{Z}\}$;
d) $M = \mathbb{Z}^2$, $R = \{((a, b), (c, d)) \in M \times M; a + d = b + c\}$;
e) $M = \mathbb{N}^2$, $R = \{((a, b), (c, d)) \in M \times M; a + d = b + c\}$;
f) $M = \mathbb{R}$, $R = \{(a, b) \in M \times M; |a - b| \leq 1\}$;
g) $M = \mathbb{R}$, $R = \{(x, y) \in M \times M; x^2 = y^2\}$;
h) $M = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, t.j. M je množina všetkých podmnožín množiny $\mathbb{N}$ a $R = \{(A, B) \in M \times M; A \triangle B \text{ je konečná}\}$ (t.j. množiny A a B sú v relácii R, ak ich symetrický rozdiel $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ je konečná množina);
i) $M = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $R = \{(A, B) \in M \times M; \text{ existuje bijekcia z } A \text{ do } B\}$;
j) $M = \mathbb{Z}$; $R = \{(x, y) \in M \times M; 3 \mid x + 2y\}$;
k) $M = \mathbb{R}$, $R = \{(x, y) \in M \times M; x - y \in \mathbb{Q}\}$;
l) $M = \mathbb{R}^2$; $R = \{((x_1, x_2), (y_1, y_2) \in M \times M; x_1 = y_1)\}$;
m) $M = \mathbb{R}^2$; $R = \{((x_1, x_2), (y_1, y_2) \in M \times M; x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2)\}$;
n) $M = \mathbb{R}^2$; $R = \{((x_1, x_2), (y_1, y_2) \in M \times M; x_1 = y_2 \wedge x_2 = y_1)\}$;
o) $M = \mathbb{R}^2$; $R = \{((x_1, x_2), (y_1, y_2) \in M \times M; x_1 = y_1 \vee x_2 = y_2)\}$;
p) $M = \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\}$, t.j. M je množina všetkých zobrazení zo $\mathbb{Z}$ do $\mathbb{Z}$; $R = \{(f, g) \in M \times M; f(1) = g(1)\}$;

q) $M = \{f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\}$, t.j. M je množina všetkých zobrazení zo $\mathbb{Z}$ do $\mathbb{Z}$; $R = \{(f,g) \in M \times M; f(1) = g(0)\}$

Ak dostanete reláciu ekvivalencie, môže sa zamyslieť aj nad tým, či sa táto reálcia dá dostať ako špeciálny prípade relácie z úlohy 4 a z úlohy 5 (pre vhodnú voľbu zobrazenia f resp. pre vhodnú voľbu grupy G a podgrupy H).

Úloha 4. a) Nech $f\colon A \to B$ je surjektívne zobrazenie. Dokážte, že relácia R na množine A určená predpisom $aRa' \Leftrightarrow f(a) = f(a')$ je relácia ekvivalencie a triedy rozkladu sú množiny $f^{-1}(\{b\}) = f^{-1}(b)$ pre $b \in B$.
b) Nech R je relácia ekvivalencie na množine A a nech B je množina všetkých tried ekvivalencie. Dokážte, že zobrazenie $f\colon A \to B$, ktoré každému prvku priradí jeho triedu ekvivalencie (teda $f\colon a \mapsto [a]$) je surjektívne.
c) V predchádzajúcej časti sme každému surjektívnemu zobrazeniu priradili reláciu ekvivalencie a obrátene. Sú tieto dve priradenia sú navzájom inverzné?

Nasledujúca úloha súvisí s tým, že (ľavé resp. pravé) triedy G podľa podgrupy H tvoria rozklad - možno ale nezaškodí presvedčiť sa aj priamo z definície relácie ekvivalencie, že platí:

Úloha 5. Nech G je grupa a H je je podgrupa. Definujme reláciu R na množine G predpisom

$$R = \{(a,b) \in G \times G; ab^{-1} \in H\}.$$

Dokážte, že R je relácia ekvivalencie na G.

Rozklad grupy podľa podgrupy

Ak H je podgrupa G, tak ľavé triedy

$$aH = \{ah; h \in H\}$$

tvoria ľavý rozklad G podľa H. (Podobne pravé triedy tvoria pravý rozklad.)

Úloha 6. Nájdite všetky ľavé (pravé) triedy grupy G podľa podgrupy H, ak
a) $G = (\mathbb{R}, +)$, $H = \mathbb{Z}$;
b) $G = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$, $H = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; y = 3x\}$;
c) $G = (\mathbb{Z}_6, \oplus)$, $H = 2\mathbb{Z}_3 = \{0, 2, 4\}$;
d) $G = S_n$, $H = A_n$;
e) $G = S_3$, $H = [(12)]$;
f) $G = (\mathbb{Z}, +)$, $H = 3\mathbb{Z} = \{3k; k \in \mathbb{Z}\}$.
(Pod „nájdite všetky triedy“ sa rozumie to, že pre každú triedu vyberieme jedného reprezentanta, v prípade, že ide o konečné množiny ich môžeme aj vypísať.)

Úloha 7. Pre podmnožinu A grupy G označíme $A^{-1} = \{a^{-1}; a \in A\}$. Dokážte
a) Pre ľubovoľnú podmnožinu $A \subseteq G$ platí $(A^{-1})^{-1} = A$.
b) Ak H je podgrupa grupy G, tak $H^{-1} = \{h^{-1}; h \in H\} = H$.
c) Pre ľubovoľné podmnožiny $A, B \subseteq G$ platí $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.