Rozklad grupy podľa podgrupy a Lagrangeova veta

Na pripomenutie: Ak H je podgrupa G, tak ľavé triedy

$$aH = \{ah; h \in H\}$$

tvoria ľavý rozklad G podľa H. (Podobne pravé triedy tvoria pravý rozklad.)

Počet ľavých a pravých tried je rovnaký, značíme ho $[G : H]$. Platí $|G| = [G : H]|H|$ (Lagrangeova veta).

Úloha 1. Ak G je konečná grupa, H je podgrupa G a K je podgrupa H, tak platí rovnosť $[G : K] = [G : H][H : K]$.

Úloha 2. Dokážte, že každá 8-prvková grupa obsahuje dvojprvkovú podgrupu.

Úloha 3. Ak G má p^2 prvkov, kde p je prvočíslo, tak každá vlastná podgrupa G je cyklická.

Úloha 4. Ak p je prvočíslo a $k \geq 1$ prirodzené číslo, tak každá p^k-prvková grupa má p-prvkovú podgrupu.

Úloha 5. Nech G je konečná grupa, počet jej prvkov označme n. Ak $A \subseteq G$ a A má viac než $n/2$ prvkov, tak A generuje G.

Túto vetu sme nestihli na prednáške – dôkaz sa dá pozrieť v texte, ale možno sa naň stihneme pozrieť aj na cviku:

Úloha 6. Dokážte, že každá 4-prvková grupa je izomorfná so $\mathbb{Z}_4$ alebo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Normálne podgrupy

Podgrupu H grupy G voláme normálna (invariantná), ak spĺňa niektorú z týchto (ekvivalentných) podmienok:

(i) $aH = Ha$ pre všetky $a \in G$,

(ii) $aH \subseteq Ha$ pre všetky $a \in G$,

(iii) $Ha \subseteq aH$ pre všetky $a \in G$,

(iv) $aHa^{-1} \subseteq H$ pre všetky $a \in G$,

(v) $aHa^{-1} = H$ pre všetky $a \in G$,

(vi) $\{aH; a \in G\} = \{Hb; b \in G\}$.

Podmienku (iv) môžeme prepísať ako

$$h \in H \qquad \Rightarrow \qquad aha^{-1} \in H.$$

Každá podgrupa komutatívnej grupy je normálna. Pre nekomutatívne grupy to vo všeobecnosti neplatí.

Úloha 7. Nájdite všetky podgrupy v S_3. Ktoré z nich sú normálne?

	id	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
id	id	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
(12)	(12)	id	(132)	(123)	(23)	(13)
(13)	(13)	(123)	id	(132)	(12)	(23)
(23)	(23)	(132)	(123)	id	(13)	(12)
(123)	(123)	(13)	(23)	(12)	(132)	id
(132)	(132)	(23)	(12)	(13)	id	(123)

Úloha 8. Ak H je podgrupa G a $[G : H] = 2$, tak H je normálna podgrupa. Navyše, pre každý prvok $G \setminus H$ platí $x^2 \in H$.

Úloha 9. Ak H a H' sú normálne podgrupy G také, že $H \cap H' = \{e\}$, tak $hh' = h'h$ pre ľubovoľné $h \in H$ a $h' \in H'$ (ľubovoľný prvok H komutuje s ľubovoľným prvkom H'.)

Úloha 10. Ak A a B sú normálne podgrupy G, $a \in A$ a $b \in B$, tak $aba^{-1}b^{-1} \in A \cap B$.

Úloha 11. Dokážte, že ľubovoľná normálna podgrupa A_n pre $n \geq 5$, ktorá obsahuje aspoň jeden cyklus dĺžky 3 je celá grupa A_n.

Úloha 12. Dokážte: Ak $f \colon G \to G'$ je homomorfizmus grúp, tak $\operatorname{Ker} f$ je normálna podgrupa grupy G.

Úloha 13. Uvažujme grupu $G = \{A \in M_{2,2}(F); |A| = 1\}$ s operáciou násobenia. (Pričom F je ľubovoľné pole.) Definujme $H = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{smallmatrix}\right); a \in F\}$.
a) Overte, že H je podgrupa G.
b) Je táto podgrupa komutatívna?
c) Je táto podgrupa normálna?
Aké lineárne zobrazenia zodpovedajú maticiam patriacim do H?

Úloha 14. Nech $G = \{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ b & a \end{smallmatrix}\right); a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ a $H = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{smallmatrix}\right); c \in \mathbb{R}\}$.
a) Overte, že G tvorí s operáciou násobenia matíc grupu a že H je podgrupa grupy G.
b) Je H normálna podgrupa grupy G?
(Všimnite si, že H je tá istá grupa, ako v predošlej úlohe, ale teraz sa na ňu pozeráme ako na podgrupu inej grupy.)