

Normálne podgrupy

Úloha 1. Ak H je podgrupa G a $[G : H] = 2$, tak H je normálna podgrupa. Navyše, pre každý prvok $x \in G$ platí $x^2 \in H$.

Úloha 2. Centrom grupy G nazývame množinu $Z(G) = \{x \in G; (\forall g \in G)gx = xg\}$ takých prvkov grupy, ktoré komutujú so všetkými prvkami G . Ukážte, že $Z(G)$ je normálna podgrupa grupy G .

Úloha 3. Dokážte, že prienik (ľubovoľného systému) normálnych podgrúp danej grupy G je opäť normálna podgrupa G .

Faktorové grupy

Ak H je normálna podgrupa grupy G , tak na množine G/H tried rozkladu sa dá zdefinovať binárna operácia predpisom

$$(aH)(bH) = (ab)H.$$

Takto dostaneme *faktorovú grupu* grupy G podľa podgrupy H .

Veta o izomorfizme: Ak $f: G \rightarrow G'$ je homomorfizmus grúp, tak $\text{Ker } f$ je normálna podgrupa grupy G a faktorová grupa $G/\text{Ker } f$ je izomorfná s podgrupou $\text{Im } f$ grupy G' .

$$G/\text{Ker } f \cong \text{Im } f$$

Úloha 4. Viete ukázať, že pre dané grupy platí $G/H \cong G'$? (Oplatí sa rozmyslieť si, ako sa to dá urobiť priamo pomocou definície faktorovej grupy a a aj ako sa dá využiť veta o izomorfizme.)

- a) $G = (\mathbb{Z}, +)$, $H = n\mathbb{Z} = \{nk; k \in \mathbb{Z}\}$; $G' = (\mathbb{Z}_n, \oplus)$
- b) $G = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$, $H = \{(x, y); 2y = 3x\}$; $G' = (\mathbb{R}, +)$
- c) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, $H = \mathbb{R}$; $G' = (S, \cdot)$
- d) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, $H = S$; $G' = (\mathbb{R}^+, \cdot)$

V príkladoch o komplexných číslach ako S označujeme množinu $\{x \in \mathbb{C}; |x| = 1\}$, t.j. *jednotkovú kružnicu* v komplexnej rovine.

Úloha 5. Nech G je grupa všetkých regulárnych matíc typu $n \times n$ (s operáciou násobenia matíc). Ako H označme tie z nich, ktoré majú determinant $|A| = 1$. Dokážte, že H je invariantná podgrupa G . Vedeli by ste nájsť grupu izomorfnú s G/H ?

Úloha 6. Overte, či H je normálna podgrupa grupy G a opíšte faktorovú grupu G/H (aké má triedy, vybrať z každej triedy práve jedného reprezentanta, zistiť, či je izomorfná s nejakou známou grupou).

- a) $G = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$, $H = \{(x, y); x + 2y = 0\}$
- b) $G = (\mathbb{C}, +)$, $H = \mathbb{R}$
- c) $G = (\mathbb{Z}, +)$, $H = 4\mathbb{Z} = \{4z; z \in \mathbb{Z}\}$
- d) $G = (\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6, +)$, $H = [(2, 2)]$
- e) $G = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$, $H = \{(n, m, 0); n, m \in \mathbb{Z}\}$
- f) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, $H = \{c \in \mathbb{C}; c^6 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$

Úloha 7. Zistite, či dané grupy sú izomorfné. V celom cvičení budeme ako S označovať grupu $(\{c \in \mathbb{C}; |c| = 1\}, \cdot)$ (prípadne množinu prvkov tejto grupy) a $C_n = (\{c \in \mathbb{C}; c^n = 1\}, \cdot)$

a) $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot) / \{c \in \mathbb{C}; c^n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot) / \mathbb{R}^+$ (pod \mathbb{R}^+ tu myslíme kladné reálne čísla, čiže $0 \notin \mathbb{R}^+$), S

b) $(\mathbb{R}, +) / \mathbb{Z}$, S / C_n , S

c) $(C \setminus \{0\}, \cdot)$, $(C \setminus \{0\}, \cdot) / C_n$

d) $(\{c \in \mathbb{C}; c^n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}, \cdot) / \mathbb{R}^+$, C_n

e) $(\{c \in \mathbb{C}; c^n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}, \cdot) / C_n$, \mathbb{R}^+

f) C_{12} / C_4 , \mathbb{Z}_3

g) $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, +) / (\mathbb{Z}_2 \times \{0\})$, \mathbb{Z}_3

h) $S_3 / [(123)]$, $(\mathbb{Z}_2, +)$

Úloha 8. Ukážte, že \mathbb{Q}/\mathbb{Z} (obe grupy berieme so sčítaním) je nekonečná grupa, v ktorej má každý prvok konečný rád.

Úloha 9. Centrom grupy G nazývame množinu $Z(G) = \{g \in G; (\forall h \in G) gh = hg\}$ takých prvkov, ktoré komutujú so všetkými prvkami G . Ukážte, že $Z(G)$ je normálna podgrupa grupy G .

Úloha 10. Nech H je normálna podgrupa G , $\varphi: G \rightarrow G/H$ je kanonický homomorfizmus a $X \subset G$. Dokážte: Ak $\varphi[X]$ generuje G/H , tak $H \cup X$ generuje G .

Úloha 11. Nech $f: G \rightarrow G'$ je surjektívny homomorfizmus a $H = \text{Ker } f$. Ukážte, že:

a) Prvky $x, x' \in G$ patria do tej istej triedy rozkladu grupy G podľa podgrupy H práve vtedy, keď

$$f(x) = f(x').$$

b) Množina tried rozkladu grupy G podľa podgrupy H sa rovná

$$\{f^{-1}(y); y \in G'\}.$$

(T.j. triedy sú presne vzory jednoprvkových podmnožín G' .)