Okruhy – základné vlastnosti, homomorfizmy

Úloha 1. Zistite (a svoje tvrdenie zdôvodnite) ktoré z uvedených vlastností sa z okruhu R prenesú na uvedené konštrukcie. (I je nejaký ideál v okruhu R a R/I označuje faktorový okruh. M je ľubovoľná neprázdna množina.)[1]

	$R \times R$	R/I	R^M	podokruh	homomorfný obraz
pole					
obor integrity					
nemá delitele nuly					
má delitele nuly					
komutatívny okruh					
okruh s jednotkou					

Úloha 2. Ak R je obor integrity a $x^2 = 1$, tak $x = 1$ alebo $x = -1$.

Úloha 3. Dokážte, že $\{(r, r); r \in R\}$ je podokruh okruhu $R \times R$. Je tento podokruh izomorfný s okruhom R?

Úloha 4. Zistite, ktoré z nasledujúcich zobrazení sú homomorfizmy medzi okruhom A všetkých matíc typu 2×2 s celočíselnými koeficientami a okruhom $\mathbb{Z}$.

a) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a$

b) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a + d$ (*stopa* matice)

c) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ad - bc$ (determinant matice)

Úloha 5. Dokážte, že okruhy $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ a $(3\mathbb{Z}, +, \cdot)$ nie sú izomorfné.

Úloha 6. Prienik ľubovoľného systému podokruhov je podokruh. Prienik ľubovoľného systému ideálov je ideál.

Úloha 7. Nech $X \neq \emptyset$ je ľubovoľná neprázdna množina. Dokážte, že potenčná množina $(P(X), \triangle, \cap)$ s operáciami $\triangle$ (symetrická diferencia množín) a $\cap$ (prienik množín) tvorí okruh. Nájdite izomorfizmus medzi týmto okruhom a okruhom $\mathbb{Z}_2^X$. (Poznámka: Bijekcia, ktorú nájdete v druhej časti, by sa dala použiť aj na dôkaz tvrdenia uvedeného v prvej časti.)

Úloha 8. Okruh R sa volá boolovský okruh, ak pre každé $a \in R$ platí $a^2 = a$. Dokážte, že každý boolovský okruh je komutatívny. (Boolovským okruhom je napríklad okruh $(P(X), \triangle, \cap)$ z predošlej úlohy.)

Úloha 9. Nech R je komutatívny okruh s jednotkou. Dokážte, že v ňom platí binomická veta

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times a^k b^{n-k}.$$

[1] Z vecí, ktoré vieme o faktorových okruhoch, by malo byť jasné, že dva stĺpce v tejto tabuľke sú vlastne to isté, len zapísané iným spôsobom.

Ideály, faktorové okruhy

Na pripomenutie: Veta o izomorfizme platí pre okruhy v rovnakom znení ako pre grupy (iba normálne podgrupy sa nahradia ideálmi). T.j. ak $f\colon R_1 \to R_2$ je surjektívny okruhový homomorfizmus, tak $\operatorname{Ker} f$ je ideál a $R_1/\operatorname{Ker} f \cong R_2$.
Ak R je komutatívny okruh s jednotkou a I je ideál v R, tak:

- R/I je pole práve vtedy, keď I je maximálny ideál.
- R/I je oborom integrity práve vtedy, keď I je vlastný prvoideál.
- Každý maximálny ideál je prvoideál.

Úloha 10. Nech F je pole a $A \neq \emptyset$. Nech Dokážte, že v okruhu F^A je každý ideál tvaru $M_p = \{f \in F^A; f(p) = 0\}$, kde p je nejaký prvok z A, maximálny. (Hint: Je faktorový okruh poľom?) [2]

Úloha 11. Ak pre každé $n \in \mathbb{N}$ je I_n ideál v okruhu R a navyše platí $I_n \subseteq I_{n+1}$, tak aj zjednotenie $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ je ideál v R.

Úloha 12. Nech R je ľubovoľný komutatívny okruh s jednotkou a $a \in R$. Potom množina $\{ax; x \in R\}$ je ideál v R, ktorý obsahuje prvok a. Tento ideál označujeme (a) a takéto ideály nazývame hlavné.

Úloha 13. Zistite, s akými okruhmi sú izomorfné okruhy $\mathbb{Z}_{60}/(15)$, $\mathbb{Z}_{60}/(20)$, $\mathbb{Z}_{60}/(12)$.

Úloha 14. Ak I_1, I_2 sú ideály v okruhu $(R, +, \cdot)$, tak aj
a) $I_1 + I_2 = \{a + b; a \in I_1, b \in I_2\}$ je ideál v R.
b) $I_1 \cdot I_2 = \{a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n; n \in \mathbb{N}, a_i, b_i \in R\}$ je ideál v R.

Úloha 15. Nech $(G, *)$ je cyklická grupa, a je jej generátor, t.j. $G = [a]$. Ak definujeme operáciu $\cdot$ ako $a^k \cdot a^l = a^{k \cdot l}$ (pre ľubovoľné $k, l \in \mathbb{Z}$), tak $(G, *, \cdot)$ je okruh. Viete povedať (v závislosti od rádu generátora a) s akým okruhom je tento okruh izomorfný?

[2] Riešenie tejto úlohy sa dá nájsť aj na fóre: `https://msleziak.com/forum/viewtopic.php?t=444`. (Samozrejme, aj tak určite odporúčam zamyslieť sa nad touto úlohou samostatne – a na riešenie, ktoré nájdete na fóre alebo niekde inde sa pozrieť až potom.)