Domáca úloha č. 1

Zverejnená 16.2.2022 - odovzdáva sa najneskôr 23.2.2022.

Nech $G = (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \setminus \{(0,0)\})$. Zistite, či zadaný predpis definuje binárnu operáciu na tejto množine, či je operácia $*$ komutatívna, asociatívna, či $(G,*)$ je komutatívna grupa.

1. Operácia $*$ je zadaná predpisom

$$(a,b) * (c,d) = (ac + 2bd, ad + bc).$$

2. Operácia $*$ je zadaná predpisom

$$(a,b) * (c,d) = (ac + 3bd, ad + bc).$$

3. Operácia $*$ je zadaná predpisom

$$(a,b) * (c,d) = (ac + 5bd, ad + bc).$$

Rozdelenie – podľa priezviska: 1 riešia A–I, 2 riešia J–P, 3 riešia R–Z

Domáca úloha č. 2

Zverejnená 23.2.2022 - odovzdáva sa najneskôr 2.3.2022.

Vo všetkých úlohách je zadanie: Zistite, či je daná podmnožina podgrupou danej grupy. Svoje tvrdenie zdôvodnite!

1. a) $\{1, 2, 4\}$ v $(\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}, \cdot)$; b) $\{2z; z \in \mathbb{Z}\}$ v $(\mathbb{R}, +)$; c) $\{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$ v $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$

2. a) $\{1, 6\}$ v $(\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}, \cdot)$; b) $\{3z; z \in \mathbb{Z}\}$ v $(\mathbb{Q}, +)$; $\{\sqrt{2}x; x \in \mathbb{Q}, x \neq 0\}$ v $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$

3. a) $\{1, 2, 5\}$ v $(\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}, \cdot)$; b) $\{3x; x \in \mathbb{Q}\}$ v $(\mathbb{R}, +)$; c) $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ v $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$

4. a) $\{1, 3, 6\}$ v $(\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}, \cdot)$; b) $\{\sqrt{3}x; x \in \mathbb{Q}\}$ v $(\mathbb{R}, +)$; c) $\{x \in \mathbb{R}; x < 0\}$ v $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$

Rozdelenie – podľa priezviska: 1 riešia A–D, 2 riešia E–K, 3 riešia L–R, 4 riešia S–Z

Domáca úloha č. 3

Zverejnená 2.3.2022 - odovzdáva sa najneskôr 9.3.2022.

1. Nech G je grupa, $a \in G$ je nejaký jej prvok. Dokážte, že $H = \{x \in G; ax = xa\}$ je podgrupa grupy G.

2. Nech G je grupa. Dokážte, že $H = \{x \in G; (\forall a \in G) ax = xa\}$ je podgrupa grupy G.

3. Nech G je grupa. Dokážte, že $H = \{x \in G; (\forall a \in G) axa^{-1} = x\}$ je podgrupa grupy G.

4. Nech G je grupa, $a \in G$ je nejaký jej prvok. Dokážte, že $H = \{x \in G; a = xax^{-1}\}$ je podgrupa grupy G.

Rozdelenie – podľa priezviska: 1 riešia A–D, 2 riešia E–K, 3 riešia L–R, 4 riešia S–Z

Domáca úloha č. 4

Zverejnená 9.3.2022 - odovzdáva sa najneskôr 16.3.2022.

Zistite, či grupy G a H sú izomorfné. Svoju odpoveď zdôvodnite.

1. a) $G = (\mathbb{Q}, +)$, $H = (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$; b) $G = (\mathbb{Z}_8, \oplus)$, $H = (\mathbb{Z}_2, \oplus) \times (\mathbb{Z}_4, \oplus)$

2. a) $G = (\mathbb{Z}, +)$, $H = (\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}, +)$; b) $G = (\mathbb{Z}_2, \oplus) \times (\mathbb{Z}, +)$, $H = (\mathbb{Z}_4, \oplus) \times (\mathbb{Z}, +)$

3. a) $G = (\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}, +)$, $H = (\{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Z}\}, +)$; b) $G = (\mathbb{Z}, +)$, $H = (\mathbb{R}, +) \times (\mathbb{R}, +)$

4. a) $G = (\mathbb{C}, +)$, $H = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$; b) $G = (\mathbb{R}, +)$, $H = (\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}, +)$

Rozdelenie – podľa priezviska: 1 riešia A–D, 2 riešia E–K, 3 riešia L–R, 4 riešia S–Z

Domáca úloha č. 5

Zverejnená 16.3.2022 - odovzdáva sa najneskôr 23.3.2022.

V každej úlohe bude zadaná nejaká podmnožina H grupy $(S_4, \circ)$. Vašou úlohou je pre permutácie z tejto množiny určiť ich rád a paritu a takisto overiť, či H je podgrupa grupy S_4. (Pripomínam, že S_4 je množina všetkých permutácií množiny $\{1, 2, 3, 4\}$ a grupovou operáciou je v tomto prípade skladanie.) Ak H je podgrupa, zistite aj to, či je táto podgrupa komutatívna alebo nie. (Pre vaše tvrdenia uveďte aj zdôvodnenie – z vášho riešenia by malo byť jasné: Akým spôsobom ste zistili, čomu sa rovná rád/parita? Na základe čoho tvrdíte, že to je/nie je podgrupa? Na základe čoho tvrdíte, že je/nie je komutatívna?)

1. $H = \{id, (14)(23), (13)(24), (12)(34)\}$

2. $H = \{id, (14)(23), (13)(24), (12)(34), (123), (124), (134), (234), (132), (142), (143), (243)\}$
(Hint: Možno nájdete pomerne jednoduché riešenie, ak sa zamyslíte nad tým, či to v skutočnosti nie je niektorá z grúp, ktoré sme spomínali na prednáške. Samozrejme, ak úlohu viete riešiť inak, nedajte sa pomýliť týmto hintom.)

3. $H = \{id, (12)(13)(14), (13)(24), (14)(13)(12)\}$

4. $H = \{id, (12), (13), (23), (123), (132)\}$

Rozdelenie – podľa priezviska: 1 riešia A–D, 2 riešia E–K, 3 riešia L–R, 4 riešia S–Z

Domáca úloha č. 6

Zverejnená 23.3.2022 - odovzdáva sa najneskôr 30.3.2022.

Zistite, či R je relácie ekvivalencie na množine A. (Jasne vyznačte, či odpoveď je áno alebo nie! Svoje tvrdenie zdôvodnite!)

1. a) $A = \mathbb{R}$, $R = \{(x, y) \in A \times A; |x - y| \leq 1\}$;
b) $A = \mathbb{R}$, $R = \{(x, y) \in A \times A; x^2 = y^2\}$

2. a) $A = \mathbb{R}$, $R = \{(x, y) \in A \times A; x \leq y\}$;
b) $A = \mathbb{Q}$, $R = \{(x, y) \in A \times A; x - y \in \mathbb{Z}\}$

3. a) $A = \mathbb{R}$, $R = \{(x, y) \in A \times A; |x^2 - y^2| \leq 1\}$;
b) $A = \mathbb{R}$, $R = \{(x, y) \in A \times A; x = y \vee x = -y\}$

4. a) $A = \mathbb{R}$, $R = \{(x, y) \in A \times A; y \leq x\}$;
b) $A = \mathbb{Z}$, $R = \{(x, y) \in A \times A; 3 \mid x^2 - y^2\}$

Rozdelenie – podľa priezviska: 1 riešia A–D, 2 riešia E–K, 3 riešia L–R, 4 riešia S–Z

Domáca úloha č. 7

Zverejnená 30.3.2022 - odovzdáva sa najneskôr 6.4.2022.

Popíšte ľavé a pravé triedy rozkladu grupy G podľa podgrupy H. (Teda by ste mali napísať, ako vyzerajú jednotlivé triedy. A tiež by ste mali tieto triedy vymenovať aj takým spôsobom, že sa tam žiadna trieda nebude opakovať viackrát.) Vaše riešenie by malo obsahovať aj zdôvodnenie toho, čo tvrdíte. (Prečo vyzerajú triedy ekvivalencie tak, ako píšete? Prečo vo vašom výbere tried je naozaj každá z nich práve raz?) Overovať, či H je skutočne podgrupa nemusíte.

1. a) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, $H = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
b) $(G = S_4, \circ)$, $H = \{id, (23), (24), (34), (234), (243)\}$

2. a) $G = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$, $H = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
b) $(G = S_4, \circ)$, $H = \{id, (12), (14), (24), (124), (142)\}$

3. a) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, $H = \{x \in \mathbb{C}; |x| = 1\}$
b) $(G = S_4, \circ)$, $H = \{id, (134), (143), (13), (14), (34)\}$

4. a) $G = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$, $H = \mathbb{Z} \times \{0\}$
b) $(G = S_4, \circ)$, $H = \{id, (12), (13), (23), (123), (132)\}$

Rozdelenie – podľa priezviska: 1 riešia A-G, 2 riešia H-M, 3 riešia N-R, 4 riešia S-Z

Domáca úloha č. 8

Zverejnená 6.4.2022 - odovzdáva sa najneskôr 13.4.2022.

Za úlohu máte odpovedať na otázky:

a) Je G grupa?

b) Je H je podgrupa G?

c) Je H je normálna podgrupa G? Ak áno, tak ďalej zistite, či faktorová grupa G/H je izomorfná s grupou G'.

Svoje tvrdenia zdôvodnite! (Samozrejme v príkladoch, kde je jasné, že ide o grupu – napríklad $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$ alebo podobné číselné množiny – netreba uvádzať žiadne detailné zdôvodnenie, že to je grupa. V niektorých úlohách však nie je na prvý pohľad jasné, či ide o grupu, práve v tých ma zaujíma zdôvodnenie.)

1. a) $G=(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},+)$, $H=\mathbb{Z}\times\{0\}$, $G'=(\mathbb{Z},+)$;
b) $G=\{\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ -b & a\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ b & -a\end{smallmatrix}\right); a,b\in\mathbb{R}; a^2+b^2=1\}$ (s operáciou násobenia matíc), $H=\{\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ -b & a\end{smallmatrix}\right); a,b\in\mathbb{R}; a^2+b^2=1\}$, $G'=(\mathbb{Z}_2,\oplus)$

2. a) $G=(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$, $H=\mathbb{R}^+=\{x\in\mathbb{R}; x>0\}$, $G'=(\{x\in\mathbb{C}; |x|=1\},\cdot)$;
b) $G=\{A\in M_{2,2}(\mathbb{R}); |A|=\pm1\}$ (s operáciou násobenia matíc); $H=\{A\in M_{2,2}(\mathbb{R}); |A|=1\}$; $G'=(\mathbb{Z}_2,\oplus)$

3. a) $G=(\mathbb{R},+)$, $H=\mathbb{Z}$, $G'=(\{x\in\mathbb{C}; |x|=1\},\cdot)$;
b) $G=\{\left(\begin{smallmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi\\ \sin\varphi & -\cos\varphi\end{smallmatrix}\right); \varphi\in\mathbb{R}\}$ (s operáciou násobenia matíc); $H=\{\left(\begin{smallmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{smallmatrix}\right); \varphi\in\mathbb{R}\}$; $G'=(\mathbb{Z}_2,\oplus)$

4. a) $G=(\mathbb{R}^3,+)$, $H=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; x+2y-z=0\}$, $G'=(\mathbb{R},+)$;
b) $G=\{A\in M_{2,2}(\mathbb{R}); |A|\neq 0\}$ (s operáciou násobenia matíc); $H=\{A\in M_{2,2}(\mathbb{R}); |A|>0\}$; $G'=(\mathbb{Z}_2,\oplus)$

Rozdelenie – podľa priezviska: 1 riešia A–D, 2 riešia E–K, 3 riešia L–R, 4 riešia S–Z

Domáca úloha č. 9

Zverejnená 13.4.2022 - odovzdáva sa najneskôr 20.4.2022.

Zistite, či zadaná množina tvorí podokruh okruhu $(\mathbb{C}, +, \cdot)$. Ak áno, tak aj zistite, či je tento podokruh oborom integrity a či je poľom.

1. $\{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Z}\}$

2. $\{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$

3. $\{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{R}\}$

4. $\{a + b\sqrt{3}; a, b \in \mathbb{Q}\}$

Rozdelenie – podľa priezviska: 1 rieši A-G, 2 rieši H-M, 3 rieši N-R, 4 rieši S-Z

Domáca úloha č. 10

Zverejnená 20.4.2022 - odovzdáva sa najneskôr 4.5.2022. (Dva týždne – keďže každej zo skupín teraz jedno cvičenie odpadne.)

Vo všetkých skupinách je zadanie: Pre daný okruh R a ideál I dokážte, že faktorový okruh R/I je izomorfný s R'.

1. $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $I = \mathbb{Z} \times \{0\}$, $R' = \mathbb{Z}$. (Na $\mathbb{Z}$ aj $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ berieme obvyklé sčitovanie a násobenie.)

2. $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $I = \{(2a, b); a, b \in \mathbb{Z}\}$, $R' = \mathbb{Z}_2$. (Na $\mathbb{Z}$ uvažujeme obvyklé operácie, na $\mathbb{Z}_2$ sčitujeme a násobíme modulo 2.)

3. $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $I = \{(2a, 2b); a, b \in \mathbb{Z}\}$, $R' = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. (Na $\mathbb{Z}$ uvažujeme obvyklé operácie, na $\mathbb{Z}_2$ sčitujeme a násobíme modulo 2.)

4. $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $I = \{(2a, 0); a \in \mathbb{Z}\}$, $R' = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$. (Na $\mathbb{Z}$ uvažujeme obvyklé operácie, na $\mathbb{Z}_2$ sčitujeme a násobíme modulo 2.)

Rozdelenie – podľa priezviska: 1 riešia A–D, 2 riešia E–K, 3 riešia L–R, 4 riešia S–Z

Domáca úloha č. 11

Zverejnená 4.5.2022 - odovzdáva sa najneskôr 20.5.2022. (Koniec prvého týždňa skúškového obdobia.)

Nájdite všetky racionálne korene daného polynómu $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$. (So zdôvodnením, že už iné racionálne korene nexistujú aj overením, že sú to skutočne korene.)

1. $f(x) = 6x^4 + 5x^3 - 8x^2 - 4x + 3$

2. $f(x) = 6x^4 - 8x^3 + 5x^2 - 4x + 1$

3. $f(x) = 6x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 7x + 2$

4. $f(x) = 6x^4 + x^3 + 8x^2 - 9x + 2$

Rozdelenie – podľa priezviska: 1 riešia A-G, 2 riešia H-M, 3 riešia N-R, 4 riešia S-Z

Domáca úloha č. 12

Zverejnená 4.5.2022 - odovzdáva sa najneskôr 20.5.2022. (Koniec prvého týždňa skúškového obdobia.)

Nájdite normovaný najväčší spoločný deliteľ $d(x) = \gcd(f(x), g(x))$ a vyjadrite ho v tvare $d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$. (Pracujeme v okruhu $\mathbb{R}[x]$.)

1. Pre $f(x) = 2x^4 + x^3 + 2x^2 + x - 1$ a $g(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 1$.

2. Pre $f(x) = 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 - x + 1$ a $g(x) = x^3 + x^2 + x - 1$.

3. Pre $f(x) = 2x^4 + x^3 + 2x^2 + x - 1$ a $g(x) = 2x^3 - x^2 + x - 1$.

4. Pre $f(x) = 2x^4 + x^3 + 2x^2 - x - 1$ a $g(x) = 2x^3 - x^2 + x - 1$.

Rozdelenie – podľa priezviska: 1 riešia A-G, 2 riešia H-M, 3 riešia N-R, 4 riešia S-Z