

## Domáca úloha č. 8

Zverejnená 6.4.2022 - odovzdáva sa najneskôr 13.4.2022.

Za úlohu máte odpovedať na otázky:

- Je  $G$  grupa?
- Je  $H$  je podgrupa  $G$ ?
- Je  $H$  je normálna podgrupa  $G$ ? Ak áno, tak ďalej zistite, či faktorová grupa  $G/H$  je izomorfná s grupou  $G'$ .

Svoje tvrdenia zdôvodnite! (Samozrejme v príkladoch, kde je jasné, že ide o grupu – napríklad  $(\mathbb{R}, +)$ ,  $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$  alebo podobné číselné množiny – netreba uvádzať žiadne detailné zdôvodnenie, že to je grupa. V niektorých úlohách však nie je na prvý pohľad jasné, či ide o grupu, práve v tých ma zaujíma zdôvodnenie.)

- $G = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$ ,  $H = \mathbb{Z} \times \{0\}$ ,  $G' = (\mathbb{Z}, +)$ ;
  - $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R}; a^2 + b^2 = 1 \right\}$  (s operáciou násobenia matíc),  $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R}; a^2 + b^2 = 1 \right\}$ ,  $G' = (\mathbb{Z}_2, \oplus)$

- $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ ,  $H = \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$ ,  $G' = (\{x \in \mathbb{C}; |x| = 1\}, \cdot)$ ;
  - $G = \{A \in M_{2,2}(\mathbb{R}); |A| = \pm 1\}$  (s operáciou násobenia matíc);  $H = \{A \in M_{2,2}(\mathbb{R}); |A| = 1\}$ ;  $G' = (\mathbb{Z}_2, \oplus)$

- $G = (\mathbb{R}, +)$ ,  $H = \mathbb{Z}$ ,  $G' = (\{x \in \mathbb{C}; |x| = 1\}, \cdot)$ ;
  - $G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}; \varphi \in \mathbb{R} \right\}$  (s operáciou násobenia matíc);  $H = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}; \varphi \in \mathbb{R} \right\}$ ;  $G' = (\mathbb{Z}_2, \oplus)$

- $G = (\mathbb{R}^3, +)$ ,  $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + 2y - z = 0\}$ ,  $G' = (\mathbb{R}, +)$ ;
  - $G = \{A \in M_{2,2}(\mathbb{R}); |A| \neq 0\}$  (s operáciou násobenia matíc);  $H = \{A \in M_{2,2}(\mathbb{R}); |A| > 0\}$ ;  $G' = (\mathbb{Z}_2, \oplus)$

Rozdelenie – podľa priezviska: 1 riešia A–D, 2 riešia E–K, 3 riešia L–R, 4 riešia S–Z