

## 1 Afinné priestory

Pripomenutie definícií:

Afinný priestor znamená, že  $(V, +)$  je vektorový priestor nad  $\mathbb{R}$ ,  $\mathcal{B} \neq \emptyset$  a:

- 1) máme zobrazenie  $\mathcal{B} \times \mathcal{B} \rightarrow V$ , ktoré dvojici bodov  $(X, Y)$  priradí práve jeden vektor  $\overrightarrow{XY}$ ;
- 2) pre ľubovoľné  $X \in \mathcal{B}$  a  $\vec{x} \in V$  existuje práve jeden bod  $Y \in \mathcal{B}$  taký, že  $\vec{x} = \overrightarrow{XY}$ ;
- 3)  $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{XZ}$

Ekvivalentná definícia:

$(V, +)$  je vektorový priestor,  $\mathcal{B} \neq \emptyset$  a máme  $+$ :  $\mathcal{B} \times V \rightarrow \mathcal{B}$ , pričom platí:

- 1)  $X + (\vec{a} + \vec{b}) = (X + \vec{a}) + \vec{b}$ ;
- 2)  $X + \vec{x} = X \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$ ;
- 3) Pre ľubovoľné  $(X, Y) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$  existuje jediný vektor  $\vec{a} \in V$  taký, že  $X + \vec{a} = Y$ ; označujeme ho aj  $\vec{a} = Y - X$ .

V dôkaze ekvivalencie týchto definícií sa ukáže, že:

$$Y - X = \overrightarrow{XY};$$

$$X + \overrightarrow{XY} = Y.$$

- 1.1. Pre afinný priestor  $(\mathcal{B}, V, +)$  dokážte, že:
  - (a)  $(Y - X) + (X - Z) = Y - Z$  pre všetky  $X, Y, Z \in \mathcal{B}$ ;
  - (b)  $X - X = \vec{0}$  pre všetky  $X \in \mathcal{B}$ ;
  - (c)  $(X + \vec{a}) - (Y + \vec{b}) = (X - Y) + \vec{a} - \vec{b}$  pre všetky  $X, Y \in \mathcal{B}$ ,  $\vec{a}, \vec{b} \in V$ .
- 1.2. Nech

$$\mathcal{B} = \{(x_1, x_2, x_3, 1); x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, 0); x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Dostaneme takto afinný priestor? (Ako operácie použijeme obvyklé sčítovanie štvoric.)

Vedeli by ste nájsť aspoň dva rôzne afinné izomorfizmy  $(\mathcal{B}, V) \rightarrow (\mathcal{B}, V)$ ?

- 1.3. [HZK, Cvičenie 2.1.1] Nech

$$\mathcal{B} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 - 2x_3 = 5\}$$

a

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}.$$

Dokážte, že  $(\mathcal{B}, V)$  s obvyklým sčítaním trojíc reálnych čísel je dvojrozmerný afinný priestor nad poľom  $\mathbb{R}$ .

- 1.4. [HZK, Cvičenie 2.1.2] Nech  $P_4$  je množina všetkých reálnych polynómov stupňa najviac 4. (Na tejto množine máme obvyklú operáciu sčítovania polynómov.) Nech  $\mathcal{B} := \{f(x) \in P_4; f(0) = 1\}$  a  $V := \{f(x) \in P_4; f(0) = 0\}$ . Overte, že  $(\mathcal{B}, V)$  je štvorrozmerný afinný priestor (ak uvažujeme obvyklé operácie).

## 2 Afinné zobrazenia

Afinné zobrazenie:  $f: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ ,  $\varphi: V \rightarrow V'$ ; zobrazenie  $\varphi$  je lineárne a platí  $\varphi(\overrightarrow{XY}) = \overrightarrow{f(X)f(Y)}$ .

Afinný izomorfizmus = afinné zobrazenie + bodová zložka je bijekcia  $\Leftrightarrow$  afinné zobrazenie + vektorová zložka je lineárny izomorfizmus

- 2.1. Ukážte, že ak  $(f, \varphi)$  je afinný izomorfizmus, tak aj  $(f^{-1}, \varphi^{-1})$  je afinný izomorfizmus.
- 2.2. Nech  $(f, \varphi): \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  je afinné zobrazenie. Nech  $(\mathcal{C}, V)$  je afinný podpriestor priestoru  $\mathcal{B}$ . Je aj  $f^{-1}[\mathcal{C}]$  afinný podpriestor priestoru  $\mathcal{A}$ ? Čo bude jeho vektorová zložka?

- 2.3. Nech  $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  je afinný súradnicový systém v afinnom priestore  $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, V)$ . Nech  $\mathcal{A}' = (\mathcal{B}', V')$  je tiež afinný priestor,  $O' \in \mathcal{B}'$  a  $\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n \in V'$ . Ukážte, že podmienkami  $f(O) = O'$ ,  $f(\vec{e}_i) = \vec{e}'_i$  pre  $i = 1, \dots, n$  je jednoznačne určené afinné zobrazenie  $(f, \varphi): \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ .

### 3 Afinné a barycentrické súradnice

Afinný súradnicový systém:  $(O, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ , kde  $O \in \mathcal{B}$  a  $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$  je báza  $V$ .

Súradnice bodu  $X$  sú  $(x_1, \dots, x_n)$ , ak  $\vec{OX} = x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n$ . Označenie  $X \equiv (x_1, \dots, x_n)$ .

*Barycentrická kombinácia*  $\sum_{i=0}^s x_i A_i$ , kde  $\sum_{i=0}^s x_i = 1$ , je definovaná ako

$$\sum_{i=0}^s x_i A_i = A + \sum_{i=0}^s x_i (A_i - A).$$

(Nezávisí od voľby bodu  $A$ .)

$(A_0, A_1, \dots, A_n)$  je barycentrický súradnicový systém  $\Leftrightarrow$  každý bod sa dá jednoznačne vyjadriť ako ich barycentrická kombinácia  $\Leftrightarrow (A_0; A_1 - A_0, \dots, A_n - A_0)$  je afinný súradnicový systém.

- 3.1. [HZK, Cvičenie 2.3.1] Majme afinný priestor  $(\mathcal{B}, V)$ , kde

$$\mathcal{B} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 - 2x_3 = 5\},$$

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\},$$

a berieme obvyklé operácie (t.j. ide o afinný podpriestor  $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ .)

- a) Overte, že trojica  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ , kde  $O = (1, 2, -1)$ ,  $\vec{e}_1 = (1, 1, 1)$ ,  $\vec{e}_2 = (1, -1, 0)$ , tvorí afinný súradnicový systém v tomto priestore.
- b) Vyjadrite súradnice bodu  $P = (3, 4, 1)$  v tejto súradnicovej sústave. Vedeli by ste nájsť aj všeobecný predpis, ako dostaneme súradnice ľubovoľného bodu  $P = (x_1, x_2, x_3)$  patriaceho do  $\mathcal{B}$ ?
- c) Definujme  $f: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^2$  ako  $f(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + 2x_2, 2x_1 - 3x_2 - 1)$ . Predstavujú hodnoty  $f(x_1, x_2, x_3)$  súradnice bodu  $(x_1, x_2, x_3)$  v nejakej vhodnej súradnicovej sústave? Ak áno, nájdite taký afinný súradnicový systém  $(O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$ .
- d) Ako by to bolo so zobrazením  $g: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definovaným ako  $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2 + 1, x_1 - x_2 + 2)$ ?
- 3.2. [HZK, Cvičenie 2.3.31] V rovine určenej bodmi  $A = (2, 1, 3)$ ,  $B = (2, 4, 0)$ ,  $C = (-3, 0, 4)$  zvolme afinnú súradnicovú sústavu  $(A, B - A, C - A)$ .
- a) Aké parametrické vyjadrenie má v tejto súradnicovej sústave priamka  $BC$ ?
- b) Aké súradnice má bod  $M$  v  $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , ak jeho súradnice v  $(A, B - A, C - A)$  sú  $(5, 3)$ .
- c) Aké súradnice má priesečník roviny  $ABC$  s osou  $x_3$  v jednej i druhej súradnicovej sústave.

- 3.3. Ukážte, že barycentrická kombinácia barycentrických kombinácií je opäť barycentrická kombinácia.

- 3.4. Zistite, či body

$$A_0 = (1, 4, 1, -1)$$

$$A_1 = (2, 2, 4, -5)$$

$$A_2 = (1, 5, 0, 0)$$

$$A_3 = (2, 7, 1, -4)$$

$A_4 = (1, -3, 4, 4)$  tvoria barycentrický súradnicový systém v  $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ . Vyjadrite bod  $P = (0, -1, 1, 4)$  ako ich barycentrickú kombináciu. (Výsledok:  $P = A_1 - A_0 + 3A_2 - 2A_3$ )

- 3.5. Nech  $A, B, C$  je trojuholník v ľubovoľnom afinnom priestore.
- Ako vyzerajú ťažnice tohoto trojuholníka vyjadrené a afinnom súradnicovom systéme  $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$ ? (Pokúste sa vyjadriť ich parametricky, t.j. napísať nejaký predpis taký, že ak meníme reálny parameter, dostaneme všetky body ležiace na ťažnici.)
  - Ukážte, že ťažnice sa pretínajú práve v jednom bode.
  - Aké sú barycentrické súradnice tohoto bodu?
- 3.6. Nech  $A, B, C$  je trojuholník v rovine a  $T$  je jeho ťažisko (barycentrum).
- Ukážte, že  $\vec{TA} + \vec{TB} + \vec{TC} = \vec{0}$ .
  - Ukážte, že pre ľubovoľný bod  $X$  v rovine platí

$$|AX|^2 + |BX|^2 + |CX|^2 = |AT|^2 + |BT|^2 + |CT|^2 + 3|XT|^2.$$

Môžete si všimnúť, že z tejto rovnosti vyplýva, že súčet štvorcov vzdialeností od vrcholov trojuholníka je minimálny práve v ťažisku trojuholníka. (Hint: Skúste využiť skalárny súčin.)

- Ako by sa zmenili výsledky z častí a) a b) ak by sme namiesto troch bodov v rovine zobrali  $n$  bodov v euklidovskom priestore ľubovoľnej dimenzie?
- 3.7. V trojrozmernom euklidovskom priestore sú dané štyri body  $A, B, C$  a  $D$  neležiace v jednej rovine. Na úsečkách  $AB, CD, AC$  a  $BD$  sú dané body  $K, L, M$  a  $N$  tak, že

$$|AK| : |KB| = |CL| : |LD| \text{ a } |AM| : |MC| = |BN| : |ND|$$

- Dokážte, že úsečky  $KL$  a  $MN$  sa pretínajú práve v jednom bode.
  - V akom pomere delí priesečník úsečiek  $KL$  a  $MN$  tieto úsečky?
- 3.8. Dokážte: a) Body  $A \equiv (a_1, a_2), B \equiv (b_1, b_2), C \equiv (c_1, c_2)$  dvojrozmerného afinného priestoru ležia na jednej priamke práve vtedy keď

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 0.$$

- Body  $A \equiv (a_1, a_2, a_3), B \equiv (b_1, b_2, b_3), C \equiv (c_1, c_2, c_3), D \equiv (d_1, d_2, d_3)$  trojrozmerného afinného priestoru ležia na jednej priamke práve vtedy keď

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix} = 0.$$

- Vedeli by ste to zovšeobecniť na  $n$ -rozmerný priestor a nadrovinu?
- 3.9. Na priamkach určených stranami  $AB, BC$  a  $AC$  trojuholníka  $ABC$  sú dané body  $A' = B + a(C - B), B' = C + b(A - C), C' = A + c(B - A)$ . Dokážte, že body  $A', B', C'$  ležia na jednej priamke práve vtedy keď  $ab + bc + ac - a - b - c + 1 = 0$ .
- 3.10. Nech  $ABCDEF$  je pravidelný šesťuholník v  $\mathbb{R}^2$ . Tvoria  $A, B, C$  barycentrickú súradnicovú sústavu? Vyjadrite v nej ostatné body šesťuholníka.

## Literatúra

[HZK] Milan Hejný, Valent Zatl'ko, and Pavel Kršňák. *Geometria 1*. SPN, Bratislava, 1985.