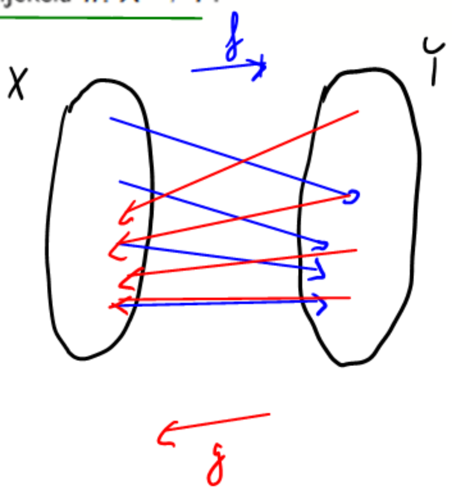
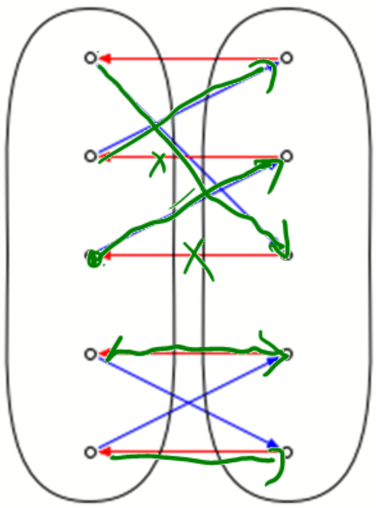
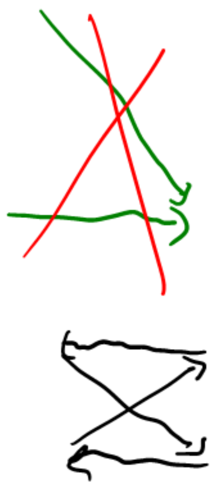
CANTOR - BERNSTEIN

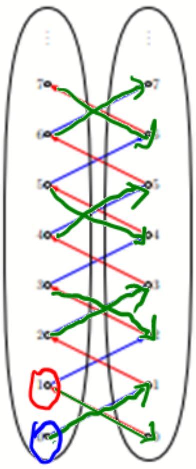
$$|X| \leq |Y| \wedge |Y| \leq |X| \qquad \Rightarrow \qquad |X| = |Y|.$$

Ak existuje injekcia $f\colon X \to Y$ a existuje injekcia $g\colon Y \to X$, tak existuje aj bijekcia $h\colon X \to Y$.



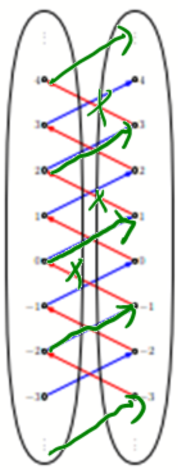






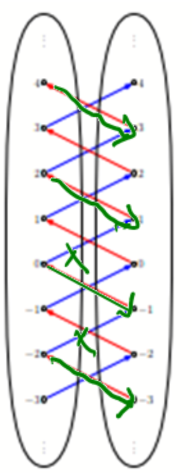
PÁRNE = modrá

NEPÁRNE = červená



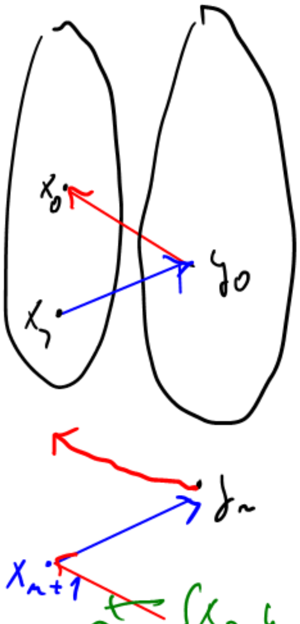
0 modrá ⇒ párne modré

0 červené ⇒ párne červené



Majme injekcie $f\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to X$ (modré a červené šípky). *Reťazec predchodcov* = vraciame sa z daného bodu množiny X po šípkach.

$x \in X$ $\quad (x_0, y_0, x_1, \dots$



DEF: $x_0 = x$

y_0 = taký prvok, že $g(y_0) = x_0$ ak existuje

x_1 = taký prvok, že $f(x_1) = y_0$

MI: $x_n, y_n \longrightarrow x_{n+1}$

?: $f(x) = y_n$ — neex. → SKONČIM; ex. → najviac 1 (f je inj.) $\quad x_{n+1}$ je $f(x_{n+1}) = y$

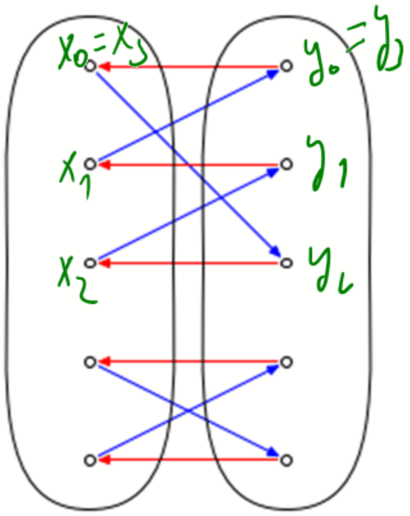
$(x_0, y_0, \dots, x_n, y_n)$

$g(y) = x_{n+1}$ → neex. skončí v $(x_0, y_0, \dots, x_{n+1})$

→ y_{n+1} je t.j. $g(y_{n+1}) = x_{n+1}$

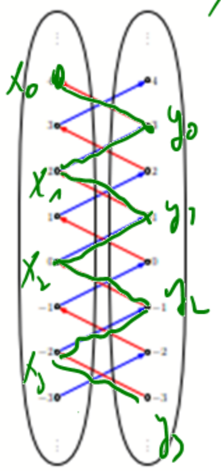
→ najviac 1 (g je injekt.)

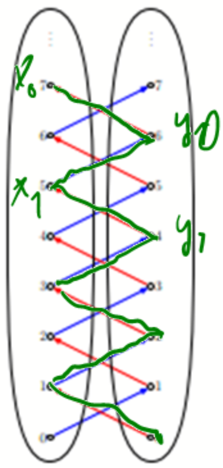
Môže byť nekonečný alebo konečný.

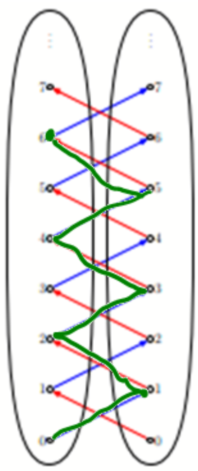


← nekonečný reťazec predch.

→ nekonečný







KONEČNÝ – skončil v Y

KONEČNÝ – skončil v X

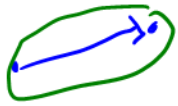
D:

Ak je konečný, mohol skončiť v množine X alebo v množine Y.
Nazvime prvok $x \in X$ *modrý,* ak je jeho reťazec predchodcov konečný a *končí v* X.

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ak } x \text{ je modré,} \\ y & \text{také, že } g(y) = x; \text{ inak.} \end{cases}$$

(?) je to ZOBR. BIJ. (?)

① h je ZOBR: $x \in X$ → je MODRÉ ✓ $h(x) = f(x)$



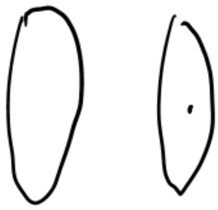
NIE je modrý

: $g(y) = x$? jediné existuje $y \in Y$ (?)

Ex. $y \in Y$ t.ž. $g(y) = x$.
(INAK: $x_0 = x$ ~~y_0~~ (x_0))

g je inj. ⇒ taký y ex. NAJVIAC 1

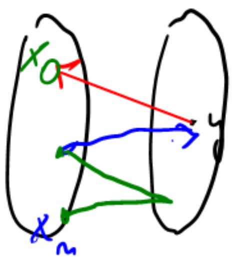
② h je SURJ:



$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ak } x \text{ je } \boxed{\text{modré,}} \\ y & \text{také, že } g(y) = x; \ \boxed{\text{inak.}} \end{cases}$$

(?) $(\forall y \in Y)(\exists x \in X)\ h(x) = y$ (?)

Nech $y \in Y$. Pozrieme sa na $g(y) = x_0$.



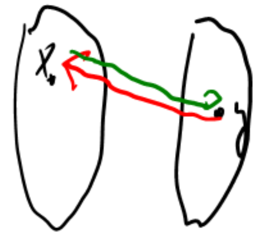
(A) x_0 je modré

reť. predch.: $(x_0, y_0 = y, x_1, \ldots, x_n)$

x_1 je modré → $\boxed{h(x_1) = y}$

③ x_0 NIE je modré

$$g(y)=x_0 \Rightarrow \boxed{h(x_0)=y}$$



h je INJ

$$h(x)=\begin{cases} f(x), & \text{ak } x \text{ je modré,}\\ y & \text{také, že } g(y)=x; \text{ inak.}\end{cases}$$

$$h(x_1)=h(x_2) \Rightarrow x_1=x_2 \quad ✓$$

(A) $x_{1,2}$ sú modré

$$h(x_1)=h(x_2) \Rightarrow f(x_1)=f(x_2) \overset{\text{INJ.}}{\Rightarrow} x_1=x_2 \quad ✓$$

(B) $x_{1,2}$ NIE sú modré

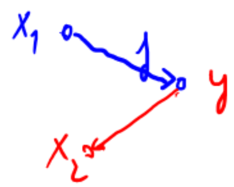
$$h(x_1)=y=h(x_2) \qquad x_1=g(y)=x_2 \quad ✓$$

(C) x_1 je modrý, x_2 NIE je modré

$$h(x_1)=h(x_2)=y$$

NEMÔŽE NASTAŤ

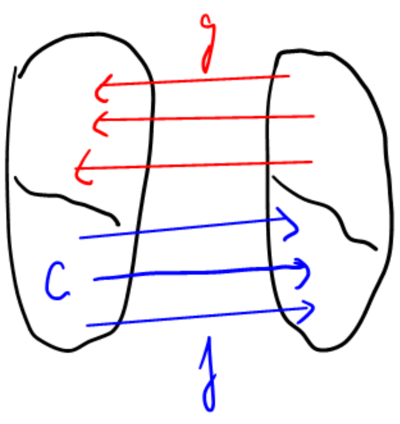
$$h(x_1)=f(x_1) \qquad g(y)=x_2$$



Ako vyzerá r. p. pre x_2.

$(x_2, y, x_1, \ldots, x)$ ← lebo x_1 je modré

↳ skončil v X SPOR □



TU: C = modré body

INÝ D: C pomocou

$$F: P(X) \to P(X)$$

$$F(A)=X \setminus g[Y \setminus f[A]] \qquad F(C)=C$$