1 Afinné priestory

Pripomenutie definícií:
Afinný priestor znamená, že $(V,+)$ je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$, $\mathcal{B} \neq \emptyset$ a:
1) máme zobrazenie $\mathcal{B} \times \mathcal{B} \to V$, ktoré dvojici bodov (X,Y) priradí práve jeden vektor $\overrightarrow{XY}$;
2) pre ľubovoľné $X \in \mathcal{B}$ a $\vec{x} \in V$ existuje práve jeden bod $Y \in \mathcal{B}$ taký, že $\vec{x} = \overrightarrow{XY}$;
3) $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{XZ}$

Ekvivalentná definícia:
$(V,+)$ je vektorový priestor, $\mathcal{B} \neq \emptyset$ a máme $+\colon \mathcal{B} \times V \to \mathcal{B}$, pričom platí:
1) $X + (\vec{a} + \vec{b}) = (X + \vec{a}) + \vec{b}$;
2) $X + \vec{x} = X \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$;
3) Pre ľubovoľné $(X,Y) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ existuje jediný vektor $\vec{a} \in V$ taký, že $X + \vec{a} = Y$; označujeme ho aj $\vec{a} = Y - X$.

V dôkaze ekvivalencie týchto definícií sa ukáže, že:
$Y - X = \overrightarrow{XY}$;
$X + \overrightarrow{XY} = Y$.

1.1. Pre afinný priestor $(\mathcal{B}, V, +)$ dokážte, že:
(a) $(Y - X) + (X - Z) = Y - Z$ pre všetky $X, Y, Z \in \mathcal{B}$;
(b) $X - X = \vec{0}$ pre všetky $X \in \mathcal{B}$;
(c) $(X + \vec{a}) - (Y + \vec{b}) = (X - Y) + \vec{a} - \vec{b}$ pre všetky $X, Y \in \mathcal{B}$, $\vec{a}, \vec{b} \in V$.

1.2. Nech

$$\mathcal{B} = \{(x_1, x_2, x_3, 1); x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$
$$V = \{(x_1, x_2, x_3, 0); x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Dostaneme takto afinný priestor? (Ako operácie použijeme obvyklé sčitovanie štvoríc.) Vedeli by ste nájsť aspoň dva rôzne afinné izomorfizmy $(\mathcal{B}, V) \to (\mathcal{B}, V)$?

1.3. [HZK, Cvičenie 2.1.1] Nech

$$\mathcal{B} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 - 2x_3 = 5\}$$

a

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}.$$

Dokážte, že $(\mathcal{B}, V)$ s obvyklým sčitovaním trojíc reálnych čísel je dvojrozmerný afinný priestor nad poľom $\mathbb{R}$.

1.4. [HZK, Cvičenie 2.1.2] Nech P_4 je množina všetkých reálnych polynómov stupňa najviac 4. (Na tejto množine máme obvyklú operáciu sčitovania polynómov.) Nech $\mathcal{B} := \{f(x) \in P_4; f(0) = 1\}$ a $V := \{f(x) \in P_4; f(0) = 0\}$. Overte, že $(\mathcal{B}, \mathcal{V})$ je štvorrozmerný afinný priestor (ak uvažujeme obvyklé operácie).

2 Afinné zobrazenia

Afinné zobrazenie: $f\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$, $\varphi\colon V \to V'$; zobrazenie φ je lineárne a platí $\varphi(\overrightarrow{XY}) = \overrightarrow{f(X)f(Y)}$.

Afinný izomorfizmus = afinné zobrazenie + bodová zložka je bijekcia $\Leftrightarrow$ afinné zobrazenie + vektorová zložka je lineárny izomorfizmus

2.1. Ukážte, že ak (f, φ) je afinný izomorfizmus, tak aj (f^{-1}, φ^{-1}) je afinný izomorfizmus.

2.2. Nech $(f, \varphi)\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ je afinné zobrazenie. Nech $(\mathcal{C}, V)$ je afinný podpriestor priestoru $\mathcal{B}$. Je aj $f^{-1}[\mathcal{C}]$ afinný podpriestor priestoru A? Čo bude jeho vektorová zložka?

2.3. Nech $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ je afinný súradnicový systém v afinnom priestore $\mathscr{A} = (\mathcal{B}, V)$. Nech $\mathscr{A}' = (\mathcal{B}', V')$ je tiež afinný priestor, $O' \in \mathcal{B}'$ a $\vec{e'}_1, \dots, \vec{e'}_n \in V'$. Ukážte, že podmienkami $f(O) = O'$, $f(\vec{e}_i) = \vec{e'}_i$ pre $i = 1, \dots, n$ je jednoznačne určené afinné zobrazenie $(f, \varphi)\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}'$.

3 Afinné a barycentrické súradnice

Afinný súradnicový systém: $(O, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$, kde $O \in \mathcal{B}$ a $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ je báza V.

Súradnice bodu X sú $(x_1, \dots, x_n)$, ak $\overrightarrow{OX} = x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n$. Označenie $X \equiv (x_1, \dots, x_n)$.

Ak pracujeme s $(\mathcal{B}, V) \subseteq (\mathbb{R}^{n+k}, \mathbb{R}^{n+k})$ tak barycentrickú kombináciu $\sum\limits_{i=0}^{s} x_i A_i$ dostaneme tak, že počítame po súradniciach. Definujeme ju iba pre koeficienty také, že $\sum\limits_{i=0}^{s} x_i = 1$.

Všeobecnejšia definícia (pre ľubovoľný afinný priestor): *Barycentrická kombinácia* $\sum\limits_{i=0}^{s} x_i A_i$, kde $\sum\limits_{i=0}^{s} x_i = 1$, je definovaná ako

$$\sum_{i=0}^{s} x_i A_i = A + \sum_{i=0}^{s} x_i (A_i - A).$$

(Nezávisí od voľby bodu A.)

$(A_0, A_1, \dots, A_n)$ je barycentrický súradnicový systém $\Leftrightarrow$ každý bod sa dá jednoznačne vyjadriť ako ich barycentrická kombinácia $\Leftrightarrow$ $(A_0; A_1 - A_0, \dots, A_n - A_0)$ je afinný súradnicový systém.

3.1. [HZK, Cvičenie 2.3.1] Majme afinný priestor $(\mathcal{B}, V)$, kde

$$\mathcal{B} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 - 2x_3 = 5\},$$
$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\},$$

a berieme obvyklé operácie (t.j. ide o afinný podpriestor $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$.)
a) Overte, že trojica $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, kde $O = (1, 2, -1)$, $\vec{e}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{e}_2 = (1, -1, 0)$, tvorí afinný súradnicový systém v tomto priestore.
b) Vyjadrite súradnice bodu $P = (3, 4, 1)$ v tejto súradnicovej sústave. Vedeli by ste nájsť aj všeobecný predpis, ako dostaneme súradnice ľubovoľného bodu $P = (x_1, x_2, x_3)$ patriaceho do $\mathcal{B}$?
c) Definujme $f\colon \mathcal{B} \to \mathbb{R}^2$ ako $f(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + 2x_2, 2x_1 - 3x_2 - 1)$. Predstavujú hodnoty $f(x_1, x_2, x_3)$ súradnice bodu (x_1, x_2, x_3) v nejakej vhodnej súradnicovej sústave? Ak áno, nájdite taký afinný súradnicový systém $(O', \vec{e'}_1, \vec{e'}_2)$.
d) Ako by to bolo so zobrazením $g\colon \mathcal{B} \to \mathbb{R}^2$ definovaným ako $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2 + 1, x_1 - x_2 + 2)$?

3.2. [HZK, Cvičenie 2.3.31] V rovine určenej bodmi $A = (2, 1, 3)$, $B = (2, 4, 0)$, $C = (-3, 0, 4)$ zvoľme afinnú súradnicovú sústavu $(A, B - A, C - A)$.
a) Aké parametrické vyjadrenie má v tejto súradnicovej sústave priamka BC?
b) Aké súradnice má bod M v $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, ak jeho súradnice v $(A, B - A, C - A)$ sú $(5, 3)$.
c) Aké súradnice má priesečník roviny ABC s osou x_3 v jednej i druhej súradnicovej sústave.

3.3. Ukážte, že barycentrická kombinácia barycentrických kombinácií je opäť barycentrická kombinácia.

3.4. Nech body $A_0, A_1, \ldots, A_n$ ležia v nejakom afinnom priestore $\mathscr{A} = (\mathcal{B}, V)$ *dimenzie n.* Dokážte, alebo nájdite kontrapríklad:
a) Ak každý bod $X \in \mathcal{B}$ sa dá vyjadriť ako barycentrická kombinácia bodov $A_0, A_1, \ldots, A_n$, tak tieto body tvoria barycentrickú súradnicovú sústavu.
b) Ak neexistuje bod $X \in \mathcal{B}$, ktorý má dve rôzne vyjadrenia v tvare barycentrickej kombinácie bodov $A_0, A_1, \ldots, A_n$, tak tieto body tvoria barycentrickú súradnicovú sústavu.

3.5. Zistite, či body
$A_0 = (1, 4, 1, -1)$
$A_1 = (2, 2, 4, -5)$
$A_2 = (1, 5, 0, 0)$
$A_3 = (2, 7, 1, -4)$
$A_4 = (1, -3, 4, 4)$ tvoria barycentrický súradnicový systém v $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$. Vyjadrite bod $P = (0, -1, 1, 4)$ ako ich barycentrickú kombináciu. (Výsledok: $P = A_1 - A_0 + 3A_2 - 2A_3$)

3.6. Nech A, B, C je trojuholník v ľubovoľnom afinnom priestore.
a) Ako vyzerajú ťažnice tohoto trojuholníka vyjadrené a afinnom súradnicovom systéme $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$? (Pokúste sa vyjadriť ich parametricky, t.j. napísať nejaký predpis taký, že ak meníme reálny parameter, dostaneme všetky body ležiace na ťažnici.)
b) Ukážte, že ťažnice sa pretínajú práve v jednom bode.
c) Aké sú barycentrické súradnice tohoto bodu?

3.7. Nech A, B, C je trojuholník v rovine a T je jeho ťažisko (barycentrum).
a) Ukážte, že $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = \vec{0}$.
b) Ukážte, že pre ľubovoľný bod X v rovine platí

$$|AX|^2 + |BX|^2 + |CX|^2 = |AT|^2 + |BT|^2 + |CT|^2 + 3|XT|^2.$$

Môžete si všimnúť, že z tejto rovnosti vyplýva, že súčet štvorcov vzdialeností od vrcholov trojuholníka je minimálny práve v ťažisku trojuholníka. (Hint: Skúste využiť skalárny súčin.)
c) Ako by sa zmenili výsledky z častí a) a b) ak by sme namiesto troch bodov v rovine zobrali n bodov v euklidovskom priestore ľubovoľnej dimenzie?

3.8. V trojrozmernom euklidovskom priestore sú dané štyri body A, B, C a D neležiace v jednej rovine. Na úsečkách AB, CD, AC a BD sú dané body K, L, M a N tak, že

$$|AK| : |KB| = |CL| : |LD| \text{ a } |AM| : |MC| = |BN| : |ND|$$

a) Dokážte, že úsečky KL a MN sa pretínajú práve v jednom bode.
b) V akom pomere delí priesečník úsečiek KL a MN tieto úsečky?

3.9. Dokážte: a) Body $A \equiv (a_1, a_2)$, $B \equiv (b_1, b_2)$, $C \equiv (c_1, c_2)$ dvojrozmerného afinného priestoru ležia na jednej priamke práve vtedy keď

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 0.$$

b) Body $A \equiv (a_1, a_2, a_3)$, $B \equiv (b_1, b_2, b_3)$, $C \equiv (c_1, c_2, c_3)$, $D \equiv (d_1, d_2, d_3)$ trojrozmerného afinného priestoru ležia v jednej rovine práve vtedy keď

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix} = 0.$$

c) Vedeli by ste to zovšeobecniť na n-rozmerný priestor a nadrovinu?

3.10. Na priamkach určených stranami AB, BC a AC trojuholníka ABC sú dané body $A' = B + a(C - B)$, $B' = C + b(A - C)$, $C' = A + c(B - A)$. Dokážte, že body A', B', C' ležia na jednej priamke práve vtedy keď $ab + bc + ac - a - b - c + 1 = 0$.

3.11. Nech $ABCDEF$ je pravidelný šesťuholník v $\mathbb{R}^2$. Tvoria A, B, C barycentrickú súradnicovú sústavu? Vyjadrite v nej ostatné body šesťuholníka.

Literatúra

[HZK] Milan Hejný, Valent Zaťko, and Pavel Kršňák. *Geometria 1.* SPN, Bratislava, 1985.