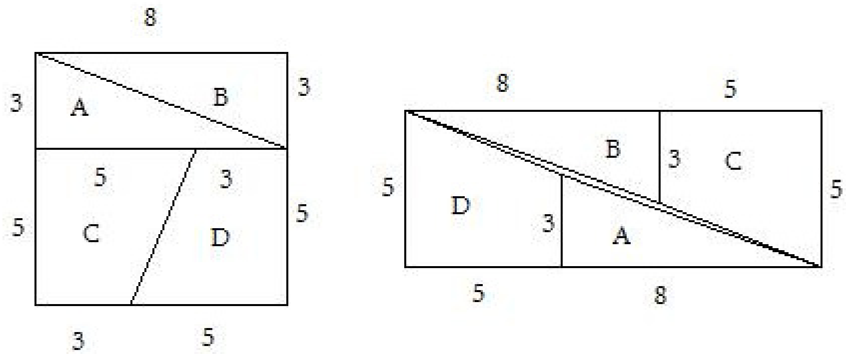


Obr. 1: Cassiniho identita.

1 Fibonacciho postupnosť

Fibonacciho postupnosť je určená rekurentným predpisom

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \tag{1}$$

a počiatočnými hodnotami $F_0 = 0$, $F_1 = 1$.

1.1. Ukážte, že pre maticu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ platí

$$A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

1.2. Dal by sa pomocou (2) nájsť algoritmus na výpočet n-tého Fibonacciho čísla, ktorý je efektívnejší ako postupné počítanie $F_1, F_2, \dots, F_n$ na základe rekurencie $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

1.3. Skontrolujte, že pre túto maticu platí $A^2 = A + I$.

1.4. Ukážte pomocou (2):
a) $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ (Cassiniho identita)
b) $F_{m+n} = F_m F_{n+1} + F_{m-1}F_n$ (konvolučná vlastnosť) [1]
c) $F_{2n} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1})$ a $F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$.

1.5. Dokážte, že $\sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_{2(n+1)}$ a $\sum_{k=0}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1$.

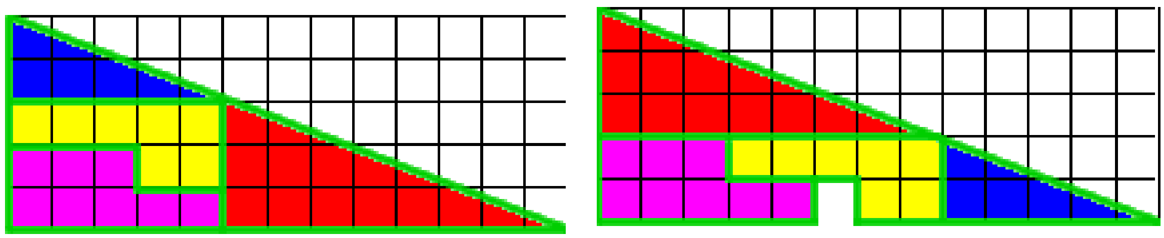
1.6. Ukážte, že $\sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$. (Hint k maticovému odvodeniu: Čomu sa rovná $(A^k)^2$? Iná možnosť: Použiť nejako $F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$.)

1.7. Ukážte, že $F_{2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k$. (Hint k maticovému odvodeniu: Skúste využiť rovnosť $A^2 = I + A$.)

1.8. Označme ako $\varphi_{1,2}$ korene polynómu $x^2 - x - 1$. (T.j. $\varphi_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ a platí $\varphi_1 + \varphi_2 = 1$, $\varphi_1 \cdot \varphi_2 = -1$.) Ukážte, že matice $A - \varphi_{1,2}I$ sú singulárne. Nájdite všetky vektory také, že $\vec{x}A = \varphi_{1,2}\vec{x}$. (T.j. v terminológii, ktorá zanedlho bude na prednáške, sme skontrolovali, že φ_1 a φ_2 sú vlastné hodnoty a našli sme k nim zodpovedajúce vlastné vektory.)

1.9. Skontrolujte, že ak P je matica, ktorej riadky sú nenulové vektory $\vec{x}_{1,2}$ také, že $\vec{x}_i A = \varphi_i A$ a $D = \mathrm{diag}(\varphi_1, \varphi_2)$, tak platí $PA = DP$. (Z toho dostávame aj $A = P^{-1}AD$.

[1] Túto vec ste stretli na diskrétnej matematike ako cvičenie na indukciu: `http://thales.doa.fmph.uniba.sk/niepel/dismat22/du02.pdf`



Obr. 2: Missing square puzzle

Potom vieme vyjadriť aj $A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = P^{-1}D^nP$, z čoho vidíme aj to, že $F_n = c_1\varphi_1^n + c_2\varphi_2^n$ pre nejaké konštanty $c_{1,2}$.)

1.10. Nájdite reálne čísla $c_{1,2}$ také, že $F_n = c_1\varphi_1^n + c_2\varphi_2^n$; takto by sa mali dostať Binetovu formulu:

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}. \tag{3}$$

1.11. Z Cassiniho identity vidíme, že $\frac{F_{n+1}}{F_n} - \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{F_nF_{n-1}}$. Vieme na základe toho (alebo na základe nejakého iného argumentu) zdôvodniť existenciu limity $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$? Čomu sa táto limita rovná?

2 Podobnosť matíc

Na prednáške ste zatiaľ ešte iba začali kapitolu o podobnosti.

2.1. a) Nájdite možné predpisy postupností (x_n), (y_n) pre ktoré platí:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2x_n + y_n \\ y_{n+1} &= x_n + 2y_n \end{aligned}$$

(Hint: Pomôže pozrieť sa na postupnosti $a_n = x_n + y_n$ a $b_n = x_n - y_n$?) b) Nájdite možné predpisy postupností (x_n), (y_n) pre ktoré platí:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 3x_n - 4y_n \\ y_{n+1} &= 2x_n - 3y_n \end{aligned}$$

2.2. a) Pre maticu $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ nájdite všetky vektory také, že $\vec{x}A = \vec{x}$ a všetky vektory také, že $\vec{x}A = 3\vec{x}$.
b) Pre maticu $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ nájdite všetky vektory také, že $\vec{x}A = \vec{x}$ a všetky vektory také, že $\vec{x}A = -\vec{x}$.
c) Súvisia veci z tejto úlohy s riešením predošlej úlohy o rekurenciách? [2]

2.3. a) Pre maticu $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ nad poľom $\mathbb{R}$ nájdite všetky vektory také, že $\vec{x}A = -2\vec{x}$ resp. $\vec{x}A = 3\vec{x}$.
b) Nech P je matica 2×2, ktorá má ako riadky nejaké nenulové vektory také, že

[2] Toto súvisí s pojmom *vlastného vektora* a *vlastnej hodnoty* – oba budú na najbližšej prednáške.

$\vec{x}_1A = -2\vec{x}_1$ a $\vec{x}_2A = 3\vec{x}$. Skontrolujte, že pre diagonálnu maticu $D = \mathrm{diag}(-2, 3)$ platí $PA = DP$. (Toto je ekvivalentné s $PAP^{-1} = D$, teda A je podobná s diagonálnou maticou D.)

c) Skontrolujte, že zobrazenie $f\colon \vec{x} \mapsto \vec{x}A$ má vzhľadom na bázu $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ maticu $M_{f,\langle\vec{x}_i\rangle} = D$. (Teda pri tejto báze sa táto lineárna transformácia dá vyjadriť diagonálnou maticou.)

2.4. Pre maticu $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ nájdite všetky vektory také, že $\vec{x}A = \vec{x}$; všetky vektory také, že $\vec{x}A = 2\vec{x}$ a všetky vektory také, že $\vec{x}A = 4\vec{x}$.

b) Nech P je matica 3×3, ktorá má ako riadky nenulové vektory také, že $\vec{x}_1A = \vec{x}_1$, $\vec{x}_2A = 2\vec{x}$ a $\vec{x}_2A = 4\vec{x}$.

2.5. Nech $A, B \in M_{n,n}(F)$. Hovoríme, že A a B sú podobné, ak existuje regulárna matica P taká, že $B = PAP^{-1}$. Dokážte, že podobnosť matíc je relácia ekvivalencie.

2.6. Nech $A \in M_{n,n}(F)$. Ukážte, že existuje polynóm $p(x)$ stupňa nanajvýš n^2 taký, že $p(A) = 0$. T.j. ak $p(x) = c_kx^k + \cdots + c_1x + c_0$, tak

$$p(A) = c_kA^k + \cdots + c_1A + c_0I = 0.$$

(Napríklad pre maticu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, sme videli, že platí $A^2 - A - I = 0$. Neskôr na prednáške budeme vidieť, že stačí polynóm stupňa n; dokážeme *Cayley–Hamiltonovu vetu,* ktorá hovorí, že takáto vec platí pre charakteristický polynóm matice A.)

Literatúra