1 Podobnosť matíc

Matice A a B sú *podobné* $\Leftrightarrow$ existuje regulárna matica P taká, že $PAP^{-1} = B$. Táto podmienka je ekvivalentná s tým, že A aj B predstavujú maticu toho istého zobrazenia v dvoch rôznych bázach. (Konkrétne, ak A je matica nejakého zobrazenia pri štandardnej báze, tak $B = PAP^{-1}$ je matica toho istého zobrazenia pri báze určenej riadkami matice P.)

Ak $c\vec{v} = \vec{v}A$, kde $\vec{v} \neq \vec{0}$, tak $\vec{v}$ je *vlastný vektor* matice A a c je *vlastná hodnota (vlastné číslo)* matice A.

Vlastné hodnoty sú presne korene *charakteristického polynómu* $\chi_A(t) = \det(tI - A)$ matice A. Ak ich počítame s algebraickou násobnosťou, tak máme:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(A) &= \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \\ \det(A) &= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n\end{aligned}$$

a súčasne stopu a determinant súvisia aj s príslušnými koeficientami charakteristického polynómu.

Podobné matice majú rovnaký charakteristický polynóm (a teda aj rovnakú stopu, determinant, vlastné čísla).

Matica typu $n \times n$ je podobná diagonálnej matici práve vtedy, keď jej vlastné vektory tvoria bázu priestoru F^n. Matice P a D také, že $PAP^{-1} = D$, kde P je regulárna a D je diagonálna, dostaneme tak, že D má na diagonále vlastné čísla a P má ako riadky (v rovnakom poradí) vlastné vektory.

Jordanov normálny tvar. Každá matica nad $\mathbb{C}$ je podobná s blokovo-diagonálnou maticou pozostávajúcou z blokov tvaru

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

1.1. Vypočítajte charakteristický polynóm a vlastné hodnoty daných matíc. Zistite, či dané matice sú podobné:
a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 10 & -12 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$;
b) [P, 1067] $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 38 & -81 \\ 16 & -34 \end{pmatrix}$

1.2. [P, 1064] Zistite, či matice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 6 & -10 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 6 & 20 & -34 \\ 6 & 32 & -51 \\ 4 & 20 & -32 \end{pmatrix}$ sú podobné.

1.3. Nájdite diagonálnu maticu podobnú s danou maticou:
a) $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ nad poľom $\mathbb{Q}$;
b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
a) Vlastné čísla sú: -5, 1. b) Vlastné čísla sú $\pm\sqrt{2}$.

1.4. Musia byť matice, ktoré majú rovnaké vlastné čísla, podobné?

1.5. Dokážte, že ak A a B sú podobné, tak sú podobné aj matice $A - cI$ a $B - cI$ (pre ľubovoľné $c \in F$).

1.6. [P, 1051] Nech φ je ľubovoľná permutácia množiny $\{1, 2, \dots, n\}$. Dokážte, že matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad B = \begin{pmatrix} a_{\varphi(1)\varphi(1)} & a_{\varphi(1)\varphi(2)} & \dots & a_{\varphi(1)\varphi(n)} \\ a_{\varphi(2)\varphi(1)} & a_{\varphi(2)\varphi(2)} & \dots & a_{\varphi(2)\varphi(n)} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{\varphi(n)\varphi(1)} & a_{\varphi(n)\varphi(2)} & \dots & a_{\varphi(n)\varphi(n)} \end{pmatrix}$$

sú podobné.

1.7. Zistite pre aké hodnoty parametrov $a, b, c \in \mathbb{C}$ je daná matica (nad $\mathbb{C}$) podobná s diagonálnou maticou.
a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$;

2 Vlastné čísla, vlastné vektory

2.1. Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory nad poľom $\mathbb{C}$.
a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} -1 & 2i \\ -2i & 2 \end{pmatrix}$, e) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
Vlastné čísla sú: a) -2, 7; b) $3 \pm 2i$; c) -3, 2; d) -2, 3; e) 2, $2 \pm \sqrt{2}$

2.2. Nájdite regulárnu maticu P a diagonálnu maticu D také, že platí $PAP^{-1} = D$. (Alebo zdôvodnite, že také matice neexistujú.)
a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 10 \\ 3 & 10 & 13 \\ -2 & -6 & -8 \end{pmatrix}$
d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ e) $A = \begin{pmatrix} 13 & 2 & -18 \\ 14 & 1 & -18 \\ 10 & 2 & -15 \end{pmatrix}$ f) $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

2.3. Ukážte, že matica A je singulárna práve vtedy, keď 0 je jej vlastné číslo.

2.4. Ukážte, že ak A je regulárna, tak matice A a A^{-1} majú rovnaké vlastné vektory. Čo viete povedať o vlastných hodnotách?

2.5. Nech A je matica typu $n \times k$ a B je matica typu $k \times n$. Ukážte, že:
a) *Nenulové* vlastné hodnoty matíc AB a BA sú rovnaké.
b) Platilo by tvrdenie z predošlej časti po vynechaní slova nenulové?
c) Ak $k = n$ matice AB a BA majú rovnaké vlastné hodnoty.

2.6. [K, 4005] Ukážte, že ak každý nenulový vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ je vlastným vektorom matice A, tak $A = cI$ pre nejaké $c \in \mathbb{R}$.

2.7. Aké matice sú podobné s maticou I? Aké matice sú podobné s nulovou maticou?

2.8. Nech A je matica $n \times n$ nad poľom $\mathbb{C}$ taká, že pre každú regulárnu maticu $n \times n$ platí $PAP^{-1} = A$. Ukážte, že potom $A = cI$ pre nejaké $c \in \mathbb{C}$. (Inak povedané, týmto sme charakterizujeme také matice, že A je podobná sama so sebou a už so žiadnou inou maticou. T.j. trieda ekvivalencie tejto matice pri relácii „podobnosť matíc“ je jednoprvková.)

2.9. Nech A je štvorcová matica nad poľom $\mathbb{C}$ taká, že 1 nie je jej vlastná hodnota. Ukážte, že ak $A^n = I$, tak $A^{n-1} + A^{n-2} + \dots + A + I = 0$.

2.10. Nájdite maticu 3×3, ktorej vlastné čísla sú 1, 2, 3 a táto matica má aspoň sedem nenulových prvkov.

3 Charakteristický a minimálny polynóm

3.1. Ukážte, že podobné matice majú rovnaký charakteristický aj minimálny polynóm. Dá sa na základe toho usúdiť, že majú aj rovnaký determinant a stopu?

3.2. * Dokážte, že každé vlastné číslo matice A je koreňom jej minimálneho polynómu $m_A(x)$.

3.3. Ak viete, že charakteristický polynóm matice A je $\chi_A(x) = x^2 + 4x - 5$, ako vyzerá charakteristický polynóm matice A^2.

3.4. Nech A je matica typu $n \times 2$ a B je matica typu $2 \times n$. Dokážte, že ak $(AB)^2 = 0$, tak aj $(BA)^2 = 0$. (Hint: Čo viete povedať o vlastných hodnotách matice BA, prípadne o jej minimálnom či charakteristickom polynóme.)

3.5. Budeme uvažovať o reálnych a komplexných maticiach takých, že

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{pmatrix} = 0 \tag{1}$$

a) Ukážte, že ak $x_{1,2,3} \in \mathbb{R}$, tak z podmienky (1) vyplýva $x_1 = x_2 = x_3$.
b) Ukážte, že existujú komplexné matice také, že platí (1) a súčasne x_1, x_2, x_3 nie sú rovnaké.
c*) Nájdite všetky možné hodnoty pre $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ také, že platí (1). (T.j. nájdite všetky komplexné matice takéhoto tvaru, ktoré majú nulový determinant.)

4 Súčasná diagonalizácia*

4.1. Nech pre matice A, B existuje regulárna matica P taká, že $PAP^{-1} = D_1$ aj $PAP^{-1} = D_2$ sú diagonálne matice. Ukážte, že $AB = BA$, t.j. matice A, B komutujú.

4.2*. Zistite, či pre dané matice A, B existuje regulárna matica P taká, že PAP^{-1} aj PBP^{-1} sú diagonálne:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Literatúra

[K] A. I. Kostrikin. *Exercises in Algebra: A collection of Exercises in Algebra, Linear Algebra and Geometry.* OPA, Amsterdam, 1996.

[P] I. V. Proskurjakov. *Sbornik zadač po lineinoi algebre.* Binom, Moskva, 9 izd. edition, 2005.