Determinanty

1. Vypočítajte determinanty: $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$
   Ak existuje inverzná matica, aký bude jej determinant? Výsledky (bez záruky): 0,-8,8.
2. Vyriešte v $\mathbb{Z}_5$ pomocou Cramerovho pravidla: $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$
3. Pomocou Cramerovho pravidla riešte:
   $$\begin{array}{rrrrr} x_1 & +5x_2 & +4x_3 & +3x_4 & =1 \\ 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & -x_4 & =0 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} x_1 & +2x_2 & +x_3 & =1 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & =0 \end{array}$$
   (Návod: Skúste zvoliť x_3, x_4 za parametre.)

4*. Majme regulárnu maticu A a sústavu tvaru $A\vec{x}^T = \vec{b}^T$. Označme ako A_i maticu, ktorá vznikne ak v matici A nahradíme i-ty stĺpec pravými stranami.
   a) Vedeli by ste vymyslieť vhodnú maticu tak aby platilo $A \cdot B_i = A_i$?
   b) Ak ste našli takú maticu, vedeli by ste pomocou nej odvodiť Cramerovo pravidlo?

5. Dokážte (pomocou definície determinantu): Nech A, B sú matice, ktoré majú ostatné riadky rovnaké a líšia sa iba v i-tom riadku. Nech C je matica, ktorej i-ty riadok je súčet i-teho riadku matice A a i-teho riadku matice B, a všetky ostatné riadky sú rovnaké ako v týchto dvoch maticiach.
   $$A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_{i-1} \\ \vec{a}_i \\ \vec{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_{i-1} \\ \vec{b}_i \\ \vec{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_{i-1} \\ \vec{a}_i + \vec{b}_i \\ \vec{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix}.$$
   Potom platí
   $$\det(C) = \det(A) + \det(B).$$
   Vedeli by ste tento výsledok aj interpretovať geometricky – pomocou objemu zodpovedajúceho rovnobežnostena? (Tento fakt spolu s tým, čo sa deje pri vynásobení konštantou, nám hovorí, že ak sa na determinant pozeráme ako na funkciu i-teho riadku, tak je to lineárne zobrazenie. Keďže to platí pre každý riadok, hovoríme tiež, že determinant je *multilineárne* zobrazenie.)
6. Určte determinanty daných matíc. Viete na základe výsledku určiť ich hodnosť pre niektoré hodnoty $c \in \mathbb{R}$?
   $\begin{vmatrix} 1 & 2 & c-1 \\ c-2 & 1 & 0 \\ c & 1 & 0 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & c-1 \\ c-2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & c \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 2 & c+1 & 0 \\ 2 & c-1 & 2c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$
7. Vypočítajte determinant
   $$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}.$$
   Dá sa výsledok nejako geometricky interpretovať? (Hovorí tento determinant niečo o lineárnom zobrazení s danou maticou?)
8. Ak viete, že 195, 403 a 247 sú násobky čísla 13, viete ukázať (bez toho, aby ste ho museli vyrátať), že aj $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix}$ je celočíselný násobok 13?

9. Ukážte, že ak $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, tak
$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0$$
10. Ukážte, že
$$\begin{vmatrix} x^2 & (x+1)^2 & (x+2)^2 \\ (x+1)^2 & (x+2)^2 & (x+3)^2 \\ (x+2)^2 & (x+3)^2 & (x+4)^2 \end{vmatrix} = -8$$
pre ľubovoľné $x \in \mathbb{R}$.
11. Vypočítajte determinant matice $\left|\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right|$. Použite súčin
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$
na odvodenie identity $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2+(ad+bc)^2$. (Fibonacciho identita)
12. Vypočítajte
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & x & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x & \cdots & (n-1)x & (n-1)x \\ 1 & x & \cdots & (n-1)x & nx \end{vmatrix}.$$
(Mali by ste dostať $x^{n-1}(x-1)$.)
13. Nech A je matica 4×4, ktorá obsahuje iba čísla ± 1. Ukážte, že $|A|$ je celočíselný násobok 8.
14. Ak A, B sú štvorcové matice a matica AB je regulárna, tak obe matice A, B sú regulárne. (Môžete sa zamyslieť nad tým, či to viete zdôvodniť s pomocou determinantov a aj nad riešením bez nich. Takisto sa môžete skúsiť zamyslieť nad tým, čo sa stane ak matice nie sú štvorcové.)
15. Nech A je matica rozmerov 2×3 a B je matica rozmerov 3×2. Aké hodnoty môže nadobúdať $\det(AB)$? Aké hodnoty môže nadobúdať $\det(BA)$?
16. Permutáciu nazývame *párnou* ak má párny počet inverzií a *nepárnou* ak má nepárny počet inverzií. Vedeli by ste použitím determinantov ukázať, že počet párnych a nepárnych permutácií v S_n je rovnaký? (Hint: Možno vám pomôže determinant matice $n \times n$ pozostávajúcej zo samých jednotiek.)
17. Vedeli by ste nájsť maticu, ktorej determinant je $x^3+y^3+z^3-3xyz$? Vedeli by ste pomocou determinantov odvodiť $x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$? Viete nájsť všetky riešenia rovnice $x^3+y^3+z^3-3xyz = 0$?
18. $D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a+b & ab \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} =?$
19. $D_n = \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 1 & \dots & 1 & 1 & n \end{vmatrix} =?$
20. Vypočítajte determinant matice typu $n \times n$

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & \dots & a & x & a \\ a & \dots & a & a & x \end{vmatrix} =?$$

(Teda ide o maticu, kde diagonálne prvky sú rovné x a všetky prvky mimo diagonály sú rovné a.)

21. Nájdite všetky hodnoty $x \in \mathbb{C}$ pre ktoré

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x & x^2 & x^3 & 1 \\ x^2 & x^3 & 1 & x \\ x^3 & 1 & x & x^2 \end{vmatrix} = 0.$$

22. Ukážte, že pre determinant blokovej matice platí

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(D)$$

(Hint: Možno sa oplatí začať tým, že si rozmyslíte, ako to je s determinantami nejakých jednoduchších matíc – napríklad $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I \end{pmatrix}$ alebo $\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$.)

23. Ukážte, že pre determinant blokovej matice platí

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A) \det(D - CA^{-1}B) = \det(A - BD^{-1}C) \det D$$

Ukážte, že ak A a C komutujú, potom sa determinant rovná $\det(AD - CB)$.