1 Determinanty

1. Vypočítajte determinanty: $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$
   Ak existuje inverzná matica, aký bude jej determinant? Výsledky: 0,−8,8.
2. Vyriešte v $\mathbb{Z}_5$ pomocou Cramerovho pravidla: $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$

3*. Majme regulárnu maticu A a sústavu tvaru $A\vec{x}^T = \vec{b}^T$. Označme ako A_i maticu, ktorá vznikne ak v matici A nahradíme i-ty stĺpec pravými stranami.
   a) Vedeli by ste vymyslieť vhodnú maticu tak aby platilo $A \cdot B_i = A_i$?
   b) Ak ste našli takú maticu, vedeli by ste pomocou nej odvodiť Cramerovo pravidlo?

4. Určte determinanty daných matíc. Viete na základe výsledku určiť ich hodnosť pre niektoré hodnoty $c \in \mathbb{R}$?
   $\begin{vmatrix} 1 & 2 & c-1 \\ c-2 & 1 & 0 \\ c & 1 & 0 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & c-1 \\ c-2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & c \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 2 & c+1 & 0 \\ 2 & c-1 & 2c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$
5. Vypočítajte determinant
   $$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}.$$
   Dá sa výsledok nejako geometricky interpretovať? (Hovorí tento determinant niečo o lineárnom zobrazení s danou maticou?)
6. Vypočítajte determinant matice $\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}$. Použite súčin
   $$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$
   na odvodenie identity $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$. (Fibonacciho identita)
7. Vypočítajte
   $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & x & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x & \cdots & (n-1)x & (n-1)x \\ 1 & x & \cdots & (n-1)x & nx \end{vmatrix}.$$
   (Mali by ste dostať $x^{n-1}(x-1)$.)
8. Nech A je matica 4×4, ktorá obsahuje iba čísla ±1. Ukážte, že $|A|$ je celočíselný násobok 8.
9. Ak viete, že 195, 403 a 247 sú násobky čísla 13, viete ukázať (bez toho, aby ste ho museli vyrátať), že aj $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix}$ je celočíselný násobok 13?
10. Vedeli by ste nájsť maticu, ktorej determinant je $x^3+y^3+z^3-3xyz$? Vedeli by ste pomocou determinantov odvodiť $x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$? Viete nájsť všetky reálne riešenia rovnice $x^3+y^3+z^3-3xyz = 0$?
11. $D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a+b & ab \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} =?$
12. $D_n = \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 1 & \dots & 1 & 1 & n \end{vmatrix} =?$
13. Vypočítajte determinant matice typu $n \times n$

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & \dots & a & x & a \\ a & \dots & a & a & x \end{vmatrix} = ?$$

(Teda ide o maticu, kde diagonálne prvky sú rovné x a všetky prvky mimo diagonály sú rovné a.)

14. Ukážte, že pre determinant blokovej matice platí

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \cdot \det D$$

za predpokladu, že A a D sú štvorcové matice. (Hint: Možno sa oplatí začať tým, že si rozmyslíte, ako to je s determinantami nejakých jednoduchších matíc – napríklad $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I \end{pmatrix}$ alebo $\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$.)

15. Ukážte, že pre determinant blokovej matice platí

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \det(D - CA^{-1}B) = \det(A - BD^{-1}C) \det D$$

za predpokladu, že A a D sú regulárne štvorcové matice. Ukážte, že ak A a C komutujú, potom sa determinant rovná $\det(AD - CB)$.

16. Ukážte, že ak $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, tak

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0$$

17. Ukážte, že

$$\begin{vmatrix} x^2 & (x+1)^2 & (x+2)^2 \\ (x+1)^2 & (x+2)^2 & (x+3)^2 \\ (x+2)^2 & (x+3)^2 & (x+4)^2 \end{vmatrix} = -8$$

pre ľubovoľné $x \in \mathbb{R}$.

18. Ak A, B sú štvorcové matice a matica AB je regulárna, tak obe matice A, B sú regulárne. (Môžete sa zamyslieť nad tým, či to viete zdôvodniť s pomocou determinantov a aj nad riešením bez nich. Takisto sa môžete skúsiť zamyslieť nad tým, čo sa stane ak matice nie sú štvorcové.)

19. Nech A je matica rozmerov 2×3 a B je matica rozmerov 3×2. Aké hodnoty môže nadobúdať $\det(AB)$? Aké hodnoty môže nadobúdať $\det(BA)$?

20. Permutáciu nazývame *párnou* ak má párny počet inverzií a *nepárnou* ak má nepárny počet inverzií. Vedeli by ste použitím determinantov ukázať, že počet párnych a nepárnych permutácií v S_n je rovnaký? (Hint: Možno vám pomôže determinant matice $n \times n$ pozostávajúcej zo samých jednotiek.)