Priestory so skalárnym súčinom

1. Zistite, či daný predpis určuje skalárny súčin na $\mathbb{R}^3$. Nech $\vec{\alpha} = (a_1, a_2, a_3)$ a $\vec{\beta} = (b_1, b_2, b_3)$.
   a) $\langle\vec{\alpha}, \vec{\beta}\rangle = a_1b_1 - a_1b_2 + a_1b_3 + a_2b_1 + 3a_2b_2 - a_3b_3$
   b) $\langle\vec{\alpha}, \vec{\beta}\rangle = a_1b_1 + 2a_1b_2 + 2a_2b_1$
   c) $\langle\vec{\alpha}, \vec{\beta}\rangle = 3a_1b_2 + 2a_2b_2 + a_3b_3$
   d) $\langle\vec{\alpha}, \vec{\beta}\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
   e) $\langle\vec{\alpha}, \vec{\beta}\rangle = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + 3a_2b_2 + a_3b_3$
   f) $\langle\vec{\alpha}, \vec{\beta}\rangle = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2 + 2a_3b_3$
   g) $\langle\vec{\alpha}, \vec{\beta}\rangle = a_1b_1 + 2a_1b_2 + 2a_2b_1 + a_2b_2 + 2a_3b_3$
   h) $\langle\vec{\alpha}, \vec{\beta}\rangle = a_1b_2 + a_2b_1$
   i) $\langle\vec{\alpha}, \vec{\beta}\rangle = 3a_1b_1 + 2a_1b_2 + a_2b_1 + 3a_3b_3$
2. Pre ľubovoľnú symetrickú maticu $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ definujme $\langle\vec{x}, \vec{y}\rangle = \vec{x}A\vec{y}^T$. Nájdite príklad matice, kedy tento predpis definuje skalárny súčin na $\mathbb{R}^n$. Nájdite aj príklad matice, kedy to tak nie je. Ktoré vlastnosti z definície skalárneho súčinu budú splnené pre každú symetrickú reálnu maticu?
3. Overte či predpis
   a) $\langle f, g\rangle = f(0)g(0) + f(1)g(1)$
   b) $\langle f, g\rangle = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1)$
   určuje skalárny súčin na priestore P_2 všetkých polynómov stupňa najviac 2 nad poľom $\mathbb{R}$.
4. Nech $V = C(0, 1)$ je priestor všetkých spojitých funkcií $\langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}$. Ukážte, že predpis
   $$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$
   definuje skalárny súčin na tomto priestore.
5. Nech V je množina všetkých postupností reálnych čísel, ktoré sú od istého člena nulové. Ukážte, že predpis
   $$\langle x, y\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$$
   definuje skalárny súčin na tomto priestore.
6. Zistite, či $\sin \pi x$ a $\cos \pi x$ sú kolmé v priestore $C(0, 1)$ so skalárnym súčinom z predošlej úlohy. Akú majú tieto vektory veľkosť?
7. Overte, že v priestore $C(0, 2\pi)$ všetkých spojitých funkcií z uzavretého intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ do $\mathbb{R}$ so skalárnym súčinom $\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$ sú ľubovoľné dve rôzne funkcie z množiny $\{1, \sin nx, \cos nx; n \in \mathbb{N}\}$ na seba kolmé. (Po vynormovaní by sme dostali množinu funkcií, ktorá má v tomto priestore do istej miery podobné vlastnosti ako ortonormálna báza v konečnorozmerných priestorov. Tento systém funkcií je dôležitý v matematickej analýze v súvislosti s *Fourierovými radmi.*)
8. Dokážte, že v ľubovoľnom euklidovskom priestore platí:
   a) $\langle\vec{\alpha}, \vec{\beta}\rangle = 0 \Rightarrow |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$ (Pytagorova veta)
   b) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\langle\vec{\alpha}, \vec{\beta}\rangle$ (kosínová veta)
   c) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 + |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = 2(|\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2)$ (rovnobežníkové pravidlo)
9. Ukážte, že pre ľubovoľné dva vektory $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ v euklidovskom vektorovom priestore platí $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ práve vtedy, keď vektory $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ a $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ sú na seba kolmé.
10. Nech $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$, kde V je euklidovský vektorový priestor. Dokážte, že $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ práve vtedy, keď $(\forall c \in \mathbb{R})|\vec{\alpha} + c\vec{\beta}| \geq |\vec{\alpha}|$.

11. Dokážte, že ak S je vektorový podpriestor euklidovského vektorového priestoru, tak $S \cap S^{\perp} = \{\vec{0}\}$.
12. Nájdite bázu a dimenziu $S^{\perp}$ pre daný podpriestor S priestoru $\mathbb{R}^4$:
    a) $S = [(1,1,0,1),(2,1,0,1)]$
    b) $S = [(1,5,4,3),(2,-1,2,-1)]$
    c) $S = [(1,2,1,1),(2,1,-1,-1)]$
    d) $S = [(1,2,3,4),(1,1,1,1),(4,3,2,1)]$
    e) $S = [(2,1,2,3),(0,1,-2,1),(1,0,2,1)]$
    f) $S = [(1,1,1,2),(1,0,1,1),(0,1,2,1)]$
13. Nájdite ortogonálnu bázu daného podpriestoru v $\mathbb{R}^n$ (so štandardným skalárnym súčinom):
    a) $S = [(1,0,1,0),(0,2,-1,1),(0,2,1,3)]$ b) $S = [(1,1,1,1),(1,0,1,2),(0,1,2,1)]$
    c) $S = [(1,1,1,1,0),(1,0,1,2,1),(0,1,2,1,1)]$
14. Nájdite ortonormálnu bázu pre priestory z úlohy 12.
15. Nájdite ortogonálnu bázu priestoru $V = [(1,0,1,0),(0,2,-1,1),(0,2,1,3)]$.
16. Ukážte, že pre ľubovoľný podpriestor S euklidovského vektorového priestoru V platí $S^{\perp\perp\perp} = S^{\perp}$. (Hint: Skúste si uvedomiť, ktorú z inklúzií medzi S a $S^{\perp}$ sme v dôkaze, že $S^{\perp\perp} = S$ platí v konečnorozmerných priestoroch, dokázali bez použitia predpokladu o konečnorozmernosti. Túto inklúziu použite raz pre S a raz pre $S^{\perp}$.)
17. Nech S je podpriestor konečnorozmerného euklidovského vektorového priestoru V. Nech $P\colon V \to V$ je ortogonálna projekcia na tento podpriestor. Overte, že:
    a) P je lineárne zobrazenie;
    b) $\operatorname{Im} P = S$ a $\operatorname{Ker} P = S^{\perp}$;
    c) $P \circ P = P$.
18. Nájdite maticu ortogonálnej projekcie pri obvyklom skalárnom súčine pre:
    a) priestory z úlohy 12;
    b) pre ľubovoľný podpriestor $S = [\vec{\alpha}]$, pričom vektor $\vec{\alpha}$ je normovaný (má jednotkovú dĺžku);
    c) pre podpriestor $S = [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k]$, pričom vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k$ sú ortonormálne.
    [Odpovede: b) $\vec{\alpha}^T\vec{\alpha}$; c) $A^T A$, kde A je matica, ktorej riadky tvoria vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k$; toto sa inak dá zapísať aj ako $\vec{\alpha}_1^T\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2^T\vec{\alpha}_2 + \cdots + \vec{\alpha}_k^T\vec{\alpha}_k$.]
19. V $\mathbb{R}^4$ so štandardným skalárnym súčinom nájdite vyjadrenie vektora $(4,1,1,6)$ ako súčtu vektora z podpriestoru L a vektora z $L^{\perp}$, ak $L = [(1,2,-2,-1),(2,3,3,2),(1,1,2,1)]$.
20. [P, 1370] Nájdite kolmý priemet vektora $\vec{x} = (4,-1,-3,4)$ do podpriestoru $S = [(1,1,1,1),(1,2,2,-1),(1,0,0,3)]$. [Výsledok by mal byť $(1,-1,-1,5)$.]
21. [P, 1372] Nájdite kolmý priemet vektora $\vec{x} = (7,-4,-1,2)$ na podpriestor S určený systémom rovníc
$$\begin{aligned} 2x_1 &+x_2 &+x_3 &+3x_4 &= 0\\ 3x_1 &+2x_2 &+2x_3 &+x_4 &= 0\\ x_1 &+2x_2 &-2x_3 &+9x_4 &= 0 \end{aligned}$$
22. Nájdite ortogonálnu projekciu vektora $\vec{a} = (9,3,3,1)$ do podpriestoru $S = [(0,1,1,1),(2,1,2,1),(2,0,1,2)]$. [Výsledok je $(8,1,5,1)$.]

Literatúra

[P] I. V. Proskurjakov. *Sbornik zadač po lineinoi algebre.* Binom, Moskva, 9 izd. edition, 2005.