Kvadratické formy

Kanonický tvar. Ľubovoľná kvadratická forma sa dá previesť zámenou premenných na kanonický tvar. Maticovo to môžeme vyjadriť tak, že ľubovoľná symetrická matica je kongruentná s diagonálnou maticou $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ takou, že $d_i \in \{0, \pm 1\}$ pre $i = 1, 2, \dots, n$.

Kladná definitnosť.

- Reálna symetrická matica A je kladne definitná, ak pre každé $\vec{x} \neq \vec{0}$ platí $\vec{x} A \vec{x}^T > 0$.
- Kladne definitné sú presne tie matice, ktorých kanonický tvar má na diagonále iba jednotky. T.j. matice tvaru $A = PP^T$.
- Sylvestrovo kritérium: Matica A je kladne definitná $\Leftrightarrow$ všetky rohové determinanty sú kladné, t.j. $D_1 > 0, D_2 > 0, \dots, D_n = |A| > 0$.
- Ak $D_1, \dots, D_n \neq 0$, tak matica A je kongruentná s maticou $\mathrm{diag}(D_1, D_2/D_1, D_3/D_2, \dots, D_n/D_{n-1})$.

Kanonický tvar

1. Overte, že kongruencia je relácia ekvivalencie na množine reálnych symetrických matíc typu $n \times n$.
2. Ukážte, že symetrické matice A, B sú kongruentné práve vtedy, keď B sa dá dostať z A striedavým použitím riadkových a stĺpcových úprav.
3. Upravte na diagonálny (prípadne kanonický) tvar a nájdite príslušnú transformáciu premenných. Zapíšte aj maticové rovnosti, ktoré z nich vyplývajú:
   a) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$
   b) $x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + x_3^2$
   c) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$
   d) $x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + x_2^2 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4 + x_3^2 - 2x_4^2$
   e) $x_1^2 + x_1x_2 + x_3x_4$
4. Nájdite kanonický tvar danej kvadratickej formy a transformáciu premenných, ktorá ju prevedie na kanonický tvar.
   a) $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$
   b) $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$
   c) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$
   d) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$
   e) $3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_2x_4$
   f) $x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$
   g) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$
   h) $x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + x_3^2$
   i) $x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 - 2x_3^2$.
   j) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_1x_4 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 + 4x_2x_4 + 2x_3x_4 + x_4^2$.
   Riešenia: a), b), f), h) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$; c) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$, d) $y_1^2 - y_2^2$; e) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$; g) $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$; j) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$; (Transformáciu premenných som sem nedával – tá nie je určená jednoznačne.)

5*. [FS, 528] Preveďte kvadratickú formu $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum\limits_{1 \le i < k \le n} x_i x_k$ na diagonálny tvar.
   [Výsledok: $y_1^2 + \frac{3}{4}y_2^2 + \frac{4}{6}y_3^2 + \dots + \frac{n+1}{2n}y_n^2$; $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix}$]

Kladná definitnosť, zákon zotrvačnosti

1. Pre danú kvadratickú formu určte tie hodnoty parametra $t \in \mathbb{R}$, pre ktoré je kladne definitná.
   a) $5x_1^2 + 3x_2^2 + tx_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 - 2x_2x_3$
   b) $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2tx_1x_2 + 2x_1x_3$
   c) $\frac{1}{2}x_1^2 + 2x_2^2 - 3tx_3^2 + 2x_1x_2 + 2tx_2x_3 + 2x_1x_3$
   d) $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3) + t(6x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_1^2) + t^2(x_1^2 + x_2^2)$
   (Poznámka: Niekedy sa výpočet determinantov $D_1, D_2, \dots$ môže zjednodušiť, ak zmeníte poradie premenných. Takáto zmena neovplyvní to, či je matica kladne definitná.)
2. Pre aké hodnoty parametra a je daná kvadratická forma kladne definitná.
   a) $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3$
   b) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2ax_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$
   c) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$
   d) $2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$.
   Odpovede: a) $|a| < \sqrt{\frac{5}{3}}$, b) $-\frac{4}{5} < a < 0$, c), d) pre žiadne a
3. Pre danú kvadratickú formu určte tie hodnoty parametra $t \in \mathbb{R}$, pre ktoré je kladne definitná.
   a) $5x_1^2 + 3x_2^2 + tx_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 - 2x_2x_3$
   b) $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2tx_1x_2 + 2x_1x_3$
   c) $\frac{1}{2}x_1^2 + 2x_2^2 - 3tx_3^2 + 2x_1x_2 + 2tx_2x_3 + 2x_1x_3$
   d) $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3) + t(6x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_1^2) + t^2(x_1^2 + x_2^2)$
   (Poznámka: Niekedy sa výpočet determinantov $D_1, D_2, \dots$ môže zjednodušiť, ak zmeníte poradie premenných. Takáto zmena neovplyvní to, či je matica kladne definitná.)
4. Nech A je symetrická reálna matica taká, že $D_1 > 0, D_2 > 0, \dots, D_n > 0$. (Determinanty $D_1, \dots, D_n$ označujú rohové determinanty vystupujúce v Sylvestrovom kritériu.) Dokážte, že potom $a_{nn} > 0$.
5. Zistite, či predpis $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x} A \vec{y}^T$ predstavuje skalárny súčin na $\mathbb{R}^3$.
   a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
6. Zistite, či daná matica je kladne definitná.
   a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
   a) Nie. b) Áno.
7. Nech V je euklidovský vektorový priestor a $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n \in V$. Definujme maticu $A = \|a_{ij}\|$ tak, že $a_{ij} = \langle \vec{\alpha}_i, \vec{\alpha}_j \rangle$. (Táto matica sa zvykne volať *Gramova matica.*) Dokážte, že $|A| \geq 0$ a že tieto vektory sú lineárne nezávislé práve vtedy, keď $|A| > 0$.
8. [P, 1201,1202] Pre ktoré z uvedených kvadratických foriem existuje regulárna transformácia premenných, ktorá prevedie jednu z nich na druhú?
   a) $f_1 = x_1^2 - x_2x_3$; $f_2 = y_1y_2 - y_3^2$; $f_3 = z_1z_2 + z_3^2$;
   b) $f_1 = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3$; $f_2 = y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2 + 4y_1y_2 - 2y_1y_3 - 4y_2y_3$; $f_3 = -4z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - 4z_1z_2 + 4z_1z_3 + 18z_2z_3$

Literatúra

[FS] D. K. Faddeev and I. C. Sominskii. *Zadači po vyssej algebre.* Laň, St. Peterburg, 1999.

[P] I. V. Proskurjakov. *Sbornik zadač po lineinoi algebre.* Binom, Moskva, 9 izd. edition, 2005.