Podobnosť matíc

Matice A a B sú *podobné* $\Leftrightarrow$ existuje regulárna matica P taká, že $PAP^{-1} = B$. Táto podmienka je ekvivalentná s tým, že A aj B predstavujú maticu toho istého zobrazenia v dvoch rôznych bázach. (Konkrétne, ak A je matica nejakého zobrazenia pri štandardnej báze, tak $B = PAP^{-1}$ je matica toho istého zobrazenia pri báze určenej riadkami matice P.)

Ak $\lambda\vec{v} = \vec{v}A$, kde $\vec{v} \neq \vec{0}$, tak $\vec{v}$ je *vlastný vektor* matice A a λ je *vlastná hodnota (vlastné číslo)* matice A. Ekvivalentne: λ je vlastná hodnota práve vtedy, keď matica $A - \lambda I$ je singulárna.

Vlastné hodnoty sú presne korene *charakteristického polynómu* $\chi_A(t) = \det(tI - A)$ matice A. Ak ich počítame s algebraickou násobnosťou,[1] tak máme:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(A) &= \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \\ \det(A) &= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n \end{aligned}$$

a súčasne stopa a determinant súvisia aj s príslušnými koeficientami charakteristického polynómu. Špeciálne pre maticu 2×2 máme $\chi_A(t) = t^2 - \mathrm{Tr}(A)t + \det(A)$.

Podobné matice majú rovnaký charakteristický polynóm (a teda aj rovnakú stopu, determinant, vlastné čísla).

Pri hľadaní koreňov charakteristického polynóm je užitočné vedieť, že ak $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ je polynóm s vedúcim koeficientom 1, ktorý má navyše *celočíselné* koeficienty, tak každý *celočíselný* koreň je deliteľom absolútneho člena a_0.

Matica typu $n \times n$ je podobná diagonálnej matici práve vtedy, keď jej vlastné vektory tvoria bázu priestoru F^n. Matice P a D také, že $PAP^{-1} = D$, kde P je regulárna a D je diagonálna, dostaneme tak, že D má na diagonále vlastné čísla a P má ako riadky (v rovnakom poradí) vlastné vektory.

1. Nech $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ je báza vektorového priestoru V nad poľom F. Ukážte, že zobrazenie, ktoré priradí vektoru jeho súradnice vzhľadom na túto bázu je izomorfizmus medzi V a F^n. T.j. hovoríme o zobrazení takom, že $f(\vec{\gamma}) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ak
$$\vec{\gamma} = \vec{x}_\alpha, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_2 n.$$
2. Ukážte, že podobnosť matíc (chápaná ako relácia na $M_{n,n}(F)$) je relácia ekvivalencie.
3. Pre $\vec{\alpha}_1 = (2,1)$, $\vec{\alpha}_2 = (1,2)$, $\vec{\beta}_1 = (-1,1)$, $\vec{\beta}_2 = (2,3)$, $\vec{\gamma}_1 = (1,1)$, $\vec{\gamma}_2 = (3,1)$. Nájdite:
   a) Maticu P_1 prechodu od bázy $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$ k báze $\vec{\beta}_1$, $\vec{\beta}_2$.
   b) Maticu P_2 prechodu od bázy $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2$ k báze $\vec{\gamma}_1$, $\vec{\gamma}_2$.
   c) Maticu P_3 prechodu od bázy $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$ k báze $\vec{\gamma}_1$, $\vec{\gamma}_2$.
   d) Aký je vzťah medzi maticami P_1, P_2 a P_3?
4. Nájdite všetky matice, ktoré sú podobné s nulovou maticou.
5. Nech $A = cI$. Aké matice sú podobné s maticou A?
6. Nájdite všetky matice A také, že jediná matica, ktorá je podobná s A, je práve matica A. (Inak povedané, trieda ekvivalencie matice A je jednoprvková.)
7. Dokážte, že ak A a B sú podobné, tak sú podobné aj matice $A - cI$ a $B - cI$ (pre ľubovoľné $c \in F$).
8. Ak aspoň jedna zo štvorcových matíc A, B stupňa n je regulárna, tak AB a BA sú podobné. Platí to aj za predpokladu, že nie sú regulárne?
9. Ukážte, že ak matica A je podobná matici B, tak aj matice A^{-1} a B^{-1} sú podobné.
10. Ukážte, že ak matica A je podobná matici B, tak aj matice A^n a B^n sú podobné pre každé $n \in \mathbb{N}$.

[1] t.j. ak $\chi_A(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \cdots (t - \lambda_n)$

11. Ukážte, že ak A a B sú podobné, tak majú rovnakú hodnosť, determinant a stopu.
12. [P, 1051] Nech φ je ľubovoľná permutácia množiny $\{1, 2, \dots, n\}$. Dokážte, že matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad B = \begin{pmatrix} a_{\varphi(1)\varphi(1)} & a_{\varphi(1)\varphi(2)} & \dots & a_{\varphi(1)\varphi(n)} \\ a_{\varphi(2)\varphi(1)} & a_{\varphi(2)\varphi(2)} & \dots & a_{\varphi(2)\varphi(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\varphi(n)\varphi(1)} & a_{\varphi(n)\varphi(2)} & \dots & a_{\varphi(n)\varphi(n)} \end{pmatrix}$$

    sú podobné.
13. Nech $P = \|p_{ij}\|$ je regulárna matica typu $n \times n$ a $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ je báza vektorového priestoru V. Potom aj vektory $\vec{\alpha}'_1, \dots, \vec{\alpha}'_n$ určené vzťahmi

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}'_1 &= p_{11}\vec{\alpha}_1 + p_{12}\vec{\alpha}_2 + \dots + p_{1n}\vec{\alpha}_n \\ \vec{\alpha}'_2 &= p_{21}\vec{\alpha}_1 + p_{22}\vec{\alpha}_2 + \dots + p_{2n}\vec{\alpha}_n \\ &\vdots \\ \vec{\alpha}'_n &= p_{n1}\vec{\alpha}_1 + p_{n2}\vec{\alpha}_2 + \dots + p_{nn}\vec{\alpha}_n \end{aligned}$$

    tvoria bázu priestoru V.
14. Pre vektory $\vec{\gamma}_i \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, 3$, označme ako $\vec{x}_i$ súradnice vektora v báze $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ a $\vec{x}'_i$ súradnice toho istého v báze $\vec{\alpha}'_1, \vec{\alpha}'_2, \vec{\alpha}'_3$. Nájdite matice prechodu od $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ k $\vec{\alpha}'_1, \vec{\alpha}'_2, \vec{\alpha}'_3$ ak viete, že $\vec{x}_1 = (1, 2, 1)$, $\vec{x}'_1 = (-1, 1, 1)$, $\vec{x}_2 = (-1, 0, 3)$, $\vec{x}'_2 = (1, -1, 1)$, $\vec{x}_3 = (3, 1, 2)$ a $\vec{x}'_3 = (2, 1, -2)$. (Návod: Bude to matica istého lineárneho zobrazenia.)

Literatúra

[P] I. V. Proskurjakov. *Sbornik zadač po lineinoi algebre.* Binom, Moskva, 9 izd. edition, 2005.