Vlastné čísla a vlastné vektory

Ak $c\vec{v} = \vec{v}A$, kde $\vec{v} \neq \vec{0}$, tak $\vec{v}$ je *vlastný vektor* matice A a c je *vlastná hodnota (vlastné číslo)* matice A.

Vlastné hodnoty sú presne korene *charakteristického polynómu* $\chi_A(t) = \det(A - tI)$ matice A.

Podobné matice majú rovnaký charakteristický polynóm (a teda aj rovnakú stopu, determinant, vlastné čísla).

Matica typu $n \times n$ je podobná diagonálnej matici práve vtedy, keď jej vlastné vektory tvoria bázu priestoru F^n. Matice P a D také, že $PAP^{-1} = D$, kde P je regulárna a D je diagonálna, dostaneme tak, že D má na diagonále vlastné čísla a P má ako riadky (v rovnakom poradí) vlastné vektory.

1. Dokážte: Štvorcová matica A je regulárna práve vtedy, keď 0 nie je vlastné číslo matice A.
   Ak A je regulárna, tak c je vlastné číslo matice A práve vtedy, keď c^{-1} je vlastné číslo matice A^{-1}.
2. Ak A je idempotentná matica, čiže $A^2 = A$, tak jej vlastné hodnoty môžu byť jedine 0 alebo 1.
3. Nech A je štvorcová matica. Ukážte, že λ je vlastné číslo matice A práve vtedy, keď $\lambda + a$ je vlastné číslo matice $A + aI$.
4. Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory daných matíc nad poľom $\mathbb{C}$:
   a) $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{smallmatrix}\right)$
   b) $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$
   c) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{smallmatrix}\right)$
   d) $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 2i \\ -2i & 2 \end{smallmatrix}\right)$
   e) $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$
   f) $\left(\begin{smallmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$
   Ak taká matica existuje, nájdite regulárnu maticu P s vlastnosťou, že PAP^{-1} je diagonálna.
5. Ako vyzerá matica A zodpovedajúca otočeniu v rovine okolo počiatku súradnicovej sústavy o nenulový uhol φ? Nájdite jej vlastné hodnoty a vlastné vektory v $\mathbb{C}$? Ako možno geometricky interpretovať fakt, že táto matica nemá reálne vlastné vektory?
6. Ukážte, že pre $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ matica $\left(\begin{smallmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ nie je podobná s diagonálnou maticou. Aká je geometrická interpretácia tohoto výsledku?
7. Ukážte, že ak k je smernica vlastného vektora matice A typu 2×2, tak k spĺňa kvadratickú rovnicu $a_{21}k^2 + (a_{11} - a_{22})k - a_{12} = 0$.
8. Nájdite (ak taká matica existuje) maticu Ptakú, že $PAP^{-1} = D$ je diagonálna matica.
   a) $\left(\begin{smallmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$
   b) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{smallmatrix}\right)$
   c) $\left(\begin{smallmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$
   d) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$
9. Vypočítajte charakteristický polynóm a vlastné hodnoty daných matíc. Zistite, či dané matice sú podobné:
   a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 10 & -12 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$;
   b*) [P, 1067] $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 38 & -81 \\ 16 & -34 \end{pmatrix}$

10*. [P, 1064] Zistite, či matice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 6 & -10 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 6 & 20 & -34 \\ 6 & 32 & -51 \\ 4 & 20 & -32 \end{pmatrix}$ sú podobné.

11. Nájdite diagonálnu maticu podobnú s danou maticou:
    a) $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ nad poľom $\mathbb{Q}$;
    b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
    a) Vlastné čísla sú: -5, 1. b) Vlastné čísla sú $\pm\sqrt{2}$.
12. Musia byť matice, ktoré majú rovnaké vlastné čísla, podobné?
13. Nájdite regulárnu maticu P a diagonálnu maticu D také, že platí $PAP^{-1} = D$. (Alebo zdôvodnite, že také matice neexistujú.)
    a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 10 \\ 3 & 10 & 13 \\ -2 & -6 & -8 \end{pmatrix}$ d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$
    e) $A = \begin{pmatrix} 13 & 2 & -18 \\ 14 & 1 & -18 \\ 10 & 2 & -15 \end{pmatrix}$ f) $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ g) $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$
14. Zistite pre aké hodnoty parametrov $a, b, c \in \mathbb{C}$ je daná matica (nad $\mathbb{C}$) podobná s diagonálnou maticou.
    a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$;
15. Nech A je matica typu $n \times k$ a B je matica typu $k \times n$. Ukážte, že:
    a) *Nenulové* vlastné hodnoty matíc AB a BA sú rovnaké.
    b) Platilo by tvrdenie z predošlej časti po vynechaní slova nenulové?
    c) Ak $k = n$ matice AB a BA majú rovnaké vlastné hodnoty.
16. [K, 4005] Ukážte, že ak každý nenulový vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ je vlastným vektorom matice A, tak $A = cI$ pre nejaké $c \in \mathbb{R}$.

Literatúra

[K] A. I. Kostrikin. *Exercises in Algebra: A collection of Exercises in Algebra, Linear Algebra and Geometry.* OPA, Amsterdam, 1996.

[P] I. V. Proskurjakov. *Sbornik zadač po lineinoi algebre.* Binom, Moskva, 9 izd. edition, 2005.