Okruhy

1. Zistite (a svoje tvrdenie zdôvodnite) ktoré z uvedených vlastností sa z okruhu R prenesú na uvedené konštrukcie. (M je ľubovoľná neprázdna množina.)

	$R \times R$	R^M	podokruh
pole			
obor integrity			
nemá delitele nuly			
má delitele nuly			
komutatívny okruh			
okruh s jednotkou			

2. Ak R je obor integrity a $x^2 = 1$, tak $x = 1$ alebo $x = -1$.
3. Je každý podokruh poľa okruh bez deliteľov nuly? Je každý podokruh poľa obsahujúci 1 oborom integrity?
4. Dokážte, že $\{(r, r); r \in R\}$ je podokruh okruhu $R \times R$. Je tento podokruh izomorfný s okruhom R?
5. Zistite, ktoré z nasledujúcich zobrazení sú homomorfizmy medzi okruhom A všetkých matíc typu 2×2 s celočíselnými koeficientami a okruhom $\mathbb{Z}$.
   a) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a$
   b) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a + d$ (*stopa* matice)
   c) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ad - bc$ (determinant matice)
6. Dokážte, že okruhy $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ a $(3\mathbb{Z}, +, \cdot)$ nie sú izomorfné.
7. Prienik ľubovoľného systému podokruhov je podokruh.
8. Nech $X \neq \emptyset$ je ľubovoľná neprázdna množina. Dokážte, že potenčná množina $(P(X), \triangle, \cap)$ s operáciami $\triangle$ (symetrická diferencia množín) a $\cap$ (prienik množín) tvorí okruh. Nájdite izomorfizmus medzi týmto okruhom a okruhom $\mathbb{Z}_2^X$. (Poznámka: Bijekcia, ktorú nájdete v druhej časti, by sa dala použiť aj na dôkaz tvrdenia uvedeného v prvej časti.)
9. Okruh R sa volá boolovský okruh, ak pre každé $a \in R$ platí $a^2 = a$. Dokážte, že každý boolovský okruh je komutatívny. (Boolovským okruhom je napríklad okruh $(P(X), \triangle, \cap)$ z predošlej úlohy.)
10. Nech R je komutatívny okruh s jednotkou. Dokážte, že v ňom platí binomická veta

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times a^k b^{n-k}.$$