Princíp zapojenia a vypojenia

Tieto úlohy sú sčasti zamerané na princíp zapojenia a vypojenia a sčasti na niektoré pojmy, ktoré sme stretli v kapitole o PIE (napríklad permutácie bez pevného bodu, Eulerova funkcia).

Ak D_n označuje počet permutácií bez pevného bodu, tak platí:

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) \tag{1}$$

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = n! \left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right) \tag{2}$$

Eulerova funkcia:

$$\varphi(n) = |\{k \in \mathbb{N}; 1 \le k \le n, \gcd(k,n) = 1\}|$$

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

$$\varphi(n) = \prod_{j=1}^{k} (p_j^{a_j} - p_j^{a_j-1}) = \prod_{j=1}^{k} p_j^{a_j-1}(p_j - 1)$$

Počet celočíselných riešení rovnice $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ vyhovujúcim podmienke $x_i \ge 0$ je práve $\binom{n+k-1}{k-1}$ a pri podmienke $x_i \ge 1$ dostaneme presne $\binom{n-1}{k-1}$ riešení.

Úloha 1. Ukážte, že

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n, \tag{3}$$

platí pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

Úloha 2. Ukážte rovnosť (2) matematickou indukciou a použitím (3). (T.j. bez použitia princípu zapojenia a vypojenia.)

Úloha 3. Uvažujme permutácie množiny $\{1, 2, \dots, n\}$. Ako sa dá vyjadriť počet permutácií, ktoré majú práve k pevných bodov?

Úloha 4. Ukážte, že pre $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} D_k.$$

Úloha 5. Ukážte, že pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}_0$ platí $n = \sum\limits_{d|n} \varphi(d)$. (Hint: Môže pomôcť skúsiť nejako rátať, koľko je takých $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, pre ktoré $\gcd(k,n) = d$.)

Úloha 6. Ukážte, že pre $n > 2$ je $\varphi(n)$ párne číslo.

Úloha 7. Koľko existuje riešení rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15$$

v nezáporných celých čísla takých, že $x_1 \le 3$, $x_2 \le 6$, $x_3 \le 12$?

Úloha 8. [R, Example 8.6.1] Aký je počet celočíselných riešení rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

takých, že platí $0 \le x_1 \le 3$, $0 \le x_2 \le 4$ a $0 \le x_3 \le 6$?

Úloha 9. Koľko existuje štvoríc celých čísel takých, že platí

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 32$$

a súčasne $0 \leq x_i \leq 10$.

Úloha 10. [B, 2.21] Koľko existuje celočíselných riešení rovnice $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$ takých, že $1 \leq x_1 \leq 3$, $2 \leq x_2 \leq 4$, $3 \leq x_3 \leq 5$, $4 \leq x_4 \leq 6$?

Úloha 11. Koľko existuje celočíselných riešení rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$$

takých, že $2 \leq x_1 \leq 4$, $3 \leq x_2 \leq 6$, $4 \leq x_3 \leq 6$, $x_4 \geq 2$.

Úloha 12. Koľko prirodzených čísel $n \leq 1000$ je deliteľných dvojkou alebo sedmičkou?

Úloha 13. [B, 2.44] Koľko existuje prirodzených čísel bez štvorcov, ktoré nepresahujú 100? (Prirodzené číslo n je číslo bez štvorcov, ak pre $k \in \mathbb{N}$ z $k^2 \mid n$ vyplýva $k = 1$. Inak povedané, nie je deliteľné žiadnou netriviálnou druhou mocninou.)

Hint: Pomôže zamyslieť sa nad tým, ako môže vyzerať prvočíselný rozklad čísla bez štvorcov.

Úloha 14. Koľko existuje celočíselných riešení rovnice $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 26$ takých, že $2 \leq x_i \leq 7$ pre $i = 1, 2, 3, 4$?

Úloha 15. Koľko existuje celočíselných riešení rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 = 18$$

v nezáporných celých číslach takých, že $0 \leq x_1 \leq 6$, $4 \leq x_2 \leq 9$, $7 \leq x_3 \leq 14$.

Úloha 16. [K, Cvicenie 4.9] Dvaja učitelia skúšajú súčasne skupinu 4 študentov, každý jeden predmet. Každý študent odpovedá z jedného predmetu 30 minút. Koľko existuje rozvrhov skúšania, ak požadujeme, aby skúšky skončili za dve hodiny?

Úloha 17. Uvažujme riešenia rovnice $x_1 + x_2 + x_3 = 48$ v nezáporných celých číslach
a) Koľko existuje riešení takých, kde všetky tri čísla x_1, x_2, x_3 sú rôzne?
b) Koľko existuje riešení takých, že $x_1 < x_2 < x_3$?

Úloha 18. Koľkými spôsobmi sa dajú permutovať písmená slova KOMBINATORIKA tak, aby sa neopakovali dve písmená po sebe.

Úloha 19. [K, Cvicenie 4.9], [HKŠ, Example 1.6.3(iii)] Koľko šesťpísmenkových slov možno zostaviť z písmen slova TIKTAK, ak dve rovnaké písmená nesmú nasledovať bezprostredne za sebou.

Úloha 20. [K, Cvicenie 4.10], [HKŠ, Exercise 6.6(iii)], [M, Example 4.4(a)], [V, Problem 214] Koľkými spôsobmi možno do radu usadiť troch Angličanov, troch Francúzov, troch Talianov tak, aby žiadni traja krajania nesedeli vedľa seba.

Úloha 21. [HKŠ, Exercise 6.3(iv)] Koľkými spôsobmi sa dá uložiť n veží na šachovnicu $n \times n$ tak, aby každé políčko bolo obsadené alebo ohrozené niektorou z nich? (Odpoveď: $2n^n - n!$.)

Literatúra

[B] V. K. Balakrishnan. *Schaum's Outline of Theory and Problems of Combinatorics including concepts of Graph Theory.* McGraw-Hill, New York, 1995.

[HKŠ] Jiří Herman, Radan Kučera, and Jaromír Šimša. *Counting and Configurations: Problems in Combinatorics, Arithmetic, and Geometry.* Springer, New York, 2003. CMS Books in Mathematics.

[K] Martin Knor. *Kombinatorika a Teória Grafov I.* Univerzita Komenského, Bratislava, 2000.

[M] Pavle Mladenović. *Combinatorics: A Problem-Based Approach.* Springer Nature Switzerland AG, Cham, 2019.

[R] Kenneth H. Rosen. *Discrete Mathematics and Its Applications.* McGraw-Hill, New York, 7th edition, 2012.

[V] N. Ya. Vilenkin. *Combinatorics.* Academic Press, New York, 1971.