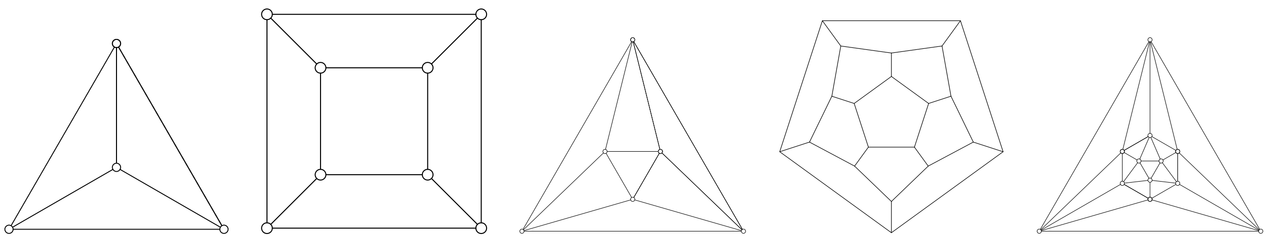
Farbenie grafov a bipartitné grafy

Úloha 1. Nájdite ofarbenie vrcholov Petersenovho grafu troma farbami. Dá sa Petersenov graf ofrabiť dvoma farbami?

Eulerovské grafy

Úloha 2. Ukážte, že súvislý graf v ktorom všetky vrcholy majú párny stupeň má eulerovský ťah. (Hint: Uvažujte najdlhší možný ťah v našom grafe. Dá sa ukázať, že musí končiť v rovnakom vrchole, kde začal? Dá sa ukázať, že obsahuje všetky hrany?)

Úloha 3. Platí charakterizácia grafov s eulerovským ťahom aj ak povolíme slučky a násobné hrany?



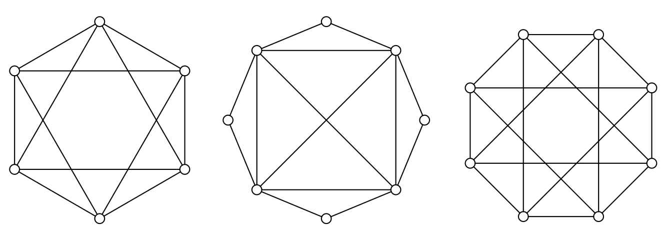
Obr. 1: Grafy zodpovedajúce platónskym telesám

Úloha 4. Ukážte, že charakterizácia eulerovských grafov (ako súvislých grafov, kde každý vrchol má párny stupeň) platí aj ak v grafoch povolíme slučky a násobné hrany.

Úloha 5. Ktoré z grafov zodpovedajúcich platónskym telesám majú uzavretý eulerovský ťah (obr. 1)?

Úloha 6. Pre ktoré n má graf K_n uzavretý eulerovský ťah?
Pre ktoré m, n má graf $K_{m,n}$ uzavretý eulerovský ťah?

Úloha 7. Majú dané grafy (uzavretý) eulerovský ťah? Ak áno, nájdite aspoň jeden.



Hamiltonovské grafy

Ak graf G má hamiltonovskú kružnicu, tak pre počet kompentov po vynechaní neprázdnej množiny vrcholov platí $c(G - S) \leq |S|$.

Ak párny graf má hamiltonovskú kružnicu, tak platí $|V_1| = |V_2|$.

- Ore: Nech G je graf na $n \geq 3$ vrcholoch. Ak súčet stupňov ľubovoľných dvoch vrcholov, ktoré nie sú spojené hranou, je aspoň n, tak G má hamiltonovskú kružnicu.
- Dirac: Ak v grafe na n vrcholoch má každý vrchol stupeň aspoň $\frac{n}{2}$, tak G má hamiltonovskú kružnicu.

- Bondy a Chvátal: Nech u, v sú nejaké nesusedné vrcholy grafu G také, že

$$\deg(u) + \deg(v) \geq n.$$

  Potom $G + uv$ má hamiltnovskú kružnicu práve vtedy, keď G' má hamiltonovskú kružnicu.

Úloha 8. Nájdite hamiltonovské kružnice pre grafy zodpovedajúce platónskym telesám (obr. 1).

Úloha 9. Ukážte, že graf $K_{m,n}$ má hamiltonovskú kružnicu práve vtedy, keď $m = n \geq 2$.

Úloha 10. [K, Cvičenie 9.9] Dokážte, že ak graf na n vrcholoch má viac ako $\binom{n-1}{2} + 1$ hrán, tak má hamiltonovskú kružnicu. Ukážte na príklade, že $\binom{n-1}{2} + 1$ hrán nestačí. (Hint: Možno pomôže Oreho veta.)

Úloha 11. Ukážte, že ak z Petersenovho grafu vynecháme niektorý vrchol, tak výsledný graf má hamiltonovskú kružnicu. (Zo starších úloh vieme, že vynechaním ľubovoľného vrchola dostaneme izomorfný graf.)

Literatúra

[K] Martin Knor. *Kombinatorika a Teória Grafov I.* Univerzita Komenského, Bratislava, 2000.