Fibonacciho čísla

$F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n. \tag{1}$$

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi} = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} \tag{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \tag{3}$$

Číslo F_{n+1} vyjadruje:

- Počet dláždení mriežky rozmerov $1 \times n$ dlaždicami veľkostí 1×1 a 1×2.
- Počet vyjadrení čísla n ako súčtu jednotiek a dvojok.
- Chceme prejsť n schodov tak, že každým krokom stúpame o jeden alebo o dva schody vyššie. Koľko je možností, ako sa to dá urobiť?

Úloha 1 (Cassiniho identita)**.**

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \tag{4}$$

Úloha 2. Pre ľubovoľné $m, n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$F_{m+n} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n \tag{5}$$

Z toho dostaneme:

$$F_{2n} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1}) \tag{6}$$

$$F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2 \tag{7}$$

Úloha 3. Ukážte, že platí

$$\sum_{k=0}^{n} F_n = F_{n+2} - 1 \tag{8}$$

Úloha 4. Ukážte, že platí

$$F_{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-k}{k} \tag{9}$$

Úloha 5. Ukážte, že platí:

$$\sum_{k=0}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1$$

$$\sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_{2n+2}$$

Úloha 6. Dokážte, že pre $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}.$$

Úloha 7. Ukážte, že pre každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$F_{2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k.$$

Lineárne rekurencie

$$A_n = c_{k-1}A_{n-1} + c_{k-2}A_{n-2} + \cdots + c_1 A_{n-k+1} + c_0 A_{n-k} \tag{10}$$

Charakteristická rovnica:

$$x^k = c_{k-1}x^{k-1} + c_{k-2}x^{k-2} + \cdots + c_1 x + c_0 \tag{11}$$

Veta 8. *Uvažujme rekurenciu* (10) *a predpokladajme navyše, že charakteristická rovnica* $x^k = c_{k-1}x^{k-1} + c_{k-2}x^{k-2} + \cdots + c_1 x + c_0$ *nemá násobné korene. Označme korene tejto rovnice v* $\mathbb{C}$ *ako* $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$.

Potom pre každé riešenie (A_n) *rekurencie* (10) *existujú koeficienty* $d_0, d_1, \dots, d_k$ *tak, že*

$$A_n = d_0\alpha_0^n + d_1\alpha_1^n + \cdots + d_k\alpha_k^n.$$

Inak povedané, postupnosti $(\alpha_i^n)_{n=0}^{\infty}$ *pre* $i = 0, 1, \dots, k$ *tvoria bázu priestoru postupností vyhovujúcich rekurencii* (10).

Veta 9. *Uvažujme rekurenciu* (10). *Nech* α *je* s*-násobný koreň je charakteristickej rovnice. Potom:*
a) Postupnosti $\alpha^n, n\alpha^n, n^2\alpha^n, \dots, n^{s-1}\alpha^n$ *vyhovujú rekurencii* (10).
b) Ak pre každý koreň zoberieme postupnosti takéhoto tvaru, tak spolu dostaneme bázu priestoru všetkých postupností spĺňajúcich (10).