Domáce úlohy riešite **samostatne**. Za každú z týchto úloh sa dá získať 10 bodov, obe majú rovnaký termín na odovzdanie: prednáška počas tretieho týždňa semestra (7. marca).

Úloha 1. Koľko sa dá zostaviť 5-ciferných kódov používajúcich číslice $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ takých, kde sa *práve jedna* cifra opakuje dvakrát (a všetky ostatné sú rôzne).

T.j. napríklad 01023, 22469, 12341 sú možnosti, ktoré chceme započítať. Ale možnosti ako 12345, 01234 nepočítame (neopakuje sa nič), takisto ani 00112, 01210 (dve opakujúce sa cifry) a ani 82818, 24144 (tu sú tri opakovania niektorej cifry).

Výsledok aj vyčíslite. (T.j. nenechajte ho iba v tvare súčinu či súčtu nejakých výrazov zložených z binomických koeficientov, faktoriálov a podobne.)

Úloha 2. Máme štandardný balíček 52 kariet (t.j. $\{A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K\} \times \{\clubsuit, \blacklozenge, \spadesuit, \heartsuit\}$). Koľkými spôsobmi sa dá vybrať 10 kariet tak, aby sme všetky karty mali rôznej hodnoty. (T.j. nevyskytnú sa dve esá, dve dvojky, atď.)

V tejto úlohe stačí nejaké vjadrenie pomocou binomických koeficientov, faktoriálov, mocnín a podobne.

Domáce úlohy riešite **samostatne**. Za každú z týchto úloh sa dá získať 10 bodov, obe majú rovnaký termín na odovzdanie: cvičenia počas piateho týždňa semestra (18. marca).

Úloha 3. Ukážte, že pre $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\binom{\binom{n}{2}}{2} = 3\binom{n}{4} + 3\binom{n}{3}.$$

Úloha 4. Zistite čomu sa rovná $\sum_{j=0}^{n} \sum_{i=j}^{n} \binom{n}{i}\binom{i}{j}$ (a nájdite nejaké zdôvodnenie).

Domáce úlohy riešite **samostatne**. Za každú z týchto úloh sa dá získať 10 bodov, obe majú rovnaký termín na odovzdanie: cvičenia počas ôsmeho týždňa semestra (8. apríla). (Termín na odovzdávanie je dlhší ako zvyčajne – 1. apríla je štátny sviatok a nie je výuka.)

Úloha 5. Nech $n, m \in \mathbb{N}_0$ a $0 \le m \le n$. Dokážte, že

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} = 2^m \binom{n}{m}.$$

Môžete používať akékoľvek identity odvodené na prednáške (alebo na cvičení) – ak sa na nejakú známu identitu odvolávate, tak jasne uveďte na akú.

Úloha 6. Nech $n, m \in \mathbb{N}_0$ a $0 \le m \le n$. Dokážte, že

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m} 2^{n-m}.$$

Môžete používať akékoľvek identity odvodené na prednáške (alebo na cvičení) – ak sa na nejakú známu identitu odvolávate, tak jasne uveďte na akú.

Domáce úlohy riešite **samostatne**. Za každú z týchto úloh sa dá získať 10 bodov, obe majú rovnaký termín na odovzdanie: cvičenia počas ôsmeho týždňa semestra (8. apríla).

Úloha 6. Koľko existuje celočíselných riešení rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 = 28$$

takých, že $3 \leq x_1 \leq 9$, $0 \leq x_2 \leq 8$, $7 \leq x_3 \leq 17$.

Výsledok vyjadrite aj ako konkrétne číslo. (T.j. nenechajte ho iba v tvare nejakého výrazu, v ktorom vystupuje viacero binomických koeficientov.)

Úloha 7. Máme štandardný balíček 52 kariet (t.j. $\{A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K\} \times \{\clubsuit, \blacklozenge, \spadesuit, \heartsuit\}$). Koľkými spôsobmi sa dá vybrať 13 kariet tak, aby sa medzi nimi bola aspoň jedna karta z $\clubsuit$, aspoň jedna karta z $\blacklozenge$, aspoň jedna z $\spadesuit$, aspoň jedna z $\heartsuit$.

Výsledok tu stačí nechať v tvare výrazu, kde budú vystupovať binomické koeficienty (a nejaké ich súčty, rozdiely, násobky).

Domáce úlohy riešite **samostatne**. Za každú z týchto úloh sa dá získať 10 bodov, obe majú rovnaký termín na odovzdanie: cvičenia počas desiateho týždňa semestra (22. apríla).

Úloha 9. Koľkými spôsobmi sa dajú permutovať písmená slova BARBAR tak, aby nenasledovali tesne po sebe?

Výsledok vyjadrite aj ako konkrétne číslo.

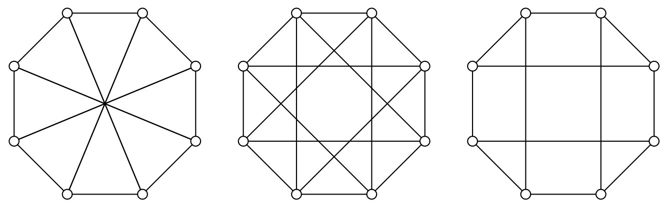
Úloha 10. Koľko je prirodzených čísel $n \leq 1000$, ktoré sú deliteľné dvojkou, trojkou alebo päťkou?

Výsledok vyjadrite aj ako konkrétne číslo.

Domáce úlohy riešite **samostatne**. Za každú z týchto úloh sa dá získať 10 bodov, obe majú rovnaký termín na odovzdanie: cvičenia počas dvanásteho týždňa semestra (6. mája).

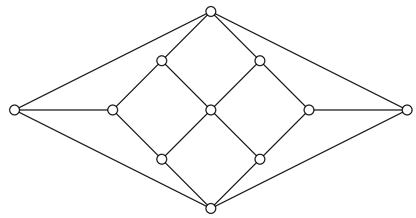
Úloha 11. Dokážte, že ak graf na n vrcholoch má aspoň $\binom{n-1}{2} + 1$ hrán, tak je súvislý. Ukážte na príklade, že $\binom{n-1}{2}$ hrán nestačí.

Úloha 12. Ktoré z nasledujúcich grafov sú rovinné? Zdôvodnite!

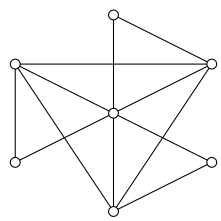


Domáce úlohy riešite **samostatne**. Za každú z týchto úloh sa dá získať 10 bodov, obe majú rovnaký termín na odovzdanie: 31. mája (koniec druhého týždňa skúškového obdobia).

Úloha 13. Dokážte, že graf na nasledujúcom obrázku nemá hamiltonovskú kružnicu. (Tento graf sa nazýva Herschelov graf.)



Úloha 14. Ukážte, že nasledujúci graf nemá hamiltonovskú kružnicu.



Domáce úlohy riešite **samostatne**. Za každú z týchto úloh sa dá získať 10 bodov, obe majú rovnaký termín na odovzdanie: 31. mája (koniec druhého týždňa skúškového obdobia).

Úloha 15. Dokážte, že pre $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}.$$

Symbol F_n označuje n-té Fibonacciho číslo. Bez zdôvodnenia je povolené použiť akékoľvek tvrdenie, ktoré je v texte k predmetu medzi výsledkami o Fibonacciho číslach. (T.j. nie medzi cvičeniami.)

Úloha 16. Nájdite vyjadrenie pre n-tý člen postupnosti určenej rekurenciou

$$A_n = 5A_{n-1} - 6A_{n-2}$$

pre $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$ a počiatočnými podmienkami $A_0 = 0$, $A_1 = 1$.