1 Binárne operácie

1.1. Vypíšte všetky možné binárne operácie na množine $\{0, 1\}$. Ktoré z nich sú asociatívne, komutatívne, majú neutrálny prvok? Pre ktoré existuje ku každému prvku aj inverzný?

1.2. Dokážte, že ak $\circ$ je binárna operácia na množine A a $\circ$ je asociatívna, tak ľubovoľné uzátvorkovanie výrazu $a \circ b \circ c \circ d$ predstavuje ten istý prvok.[1]

1.3. Pre dve reálne čísla a, b definujme

$$a * b = \frac{a+b}{2},$$

t.j. výsledkom je ich priemer. Je to binárna operácia na $\mathbb{R}$? Je táto operácia komutatívna? Je asociatívna? Má neutrálny prvok?

1.4. LAG 1.2.9(1): Na $\mathbb{R}$ definujme binárnu operáciu $*$ predpisom $x * y = x \cdot y^2$ (kde $\cdot$ je násobenie reálnych čísel). Má táto operácia neutrálny prvok? Ak má, nájdite ho. Je operácia $*$ asociatívna? Je komutatívna?

1.5*. Ak viete, že ide o tabuľku asociatívnej binárnej operácie, doplňte chýbajúce výsledky (ak sa to dá).

	a	b	c
a	b	a	c
b			
c			

2 Grupy

$(G, *)$ je grupa, ak $*$ je binárna operácia na G a ďalej platí: Binárna operácia $*$ je asociatívna (A). V G existuje neutrálny prvok pre túto operáciu (N). Pre každý prvok z G existuje inverzný prvok (I).

$$(\forall a, b, c \in G) a * (b * c) = (a * b) * c \tag{A}$$

$$(\exists e \in G)(\forall a \in G) a * e = e * a = e \tag{N}$$

$$(\forall a \in G)(\exists b \in G) a * b = b * a = e \tag{I}$$

O komutatívnej grupe (abelovskej grupe) hovoríme, ak operácia $*$ je navyše komutatívna.

$$(\forall a, b \in G) a * b = b * a \tag{K}$$

2.1. Ktoré z uvedených množín tvoria vzhľadom na dané operácie grupu? V ktorých prípadoch je táto grupa komutatívna?
a) $(\mathbb{Z}, \cdot)$ (celé čísla s obvyklým násobením)
b) $(\mathbb{R}, \cdot)$ (reálne čísla s obvyklým násobením)
c) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, d) $(\mathbb{C}, +)$, e) $(\mathbb{C}, \cdot)$, f) $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$
g) $(\mathbb{R}^2, +)$ (so sčitovaním definovaným po zložkách)
h) $\mathbb{R}$ s operáciou $*$ definovanou ako $a * b = a + b - 1$
i) $\mathbb{R}$ s operáciou $*$ zadanou predpisom $a * b = ab + a + b$
j) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ s operáciou $*$ zadanou predpisom $a * b = ab + a + b$
k) Množina všetkých párnych celých čísel vzhľadom na sčitovanie.
l) Množina všetkých nepárnych celých čísel vzhľadom na sčitovanie.
m) $(\mathbb{Z}_5, \oplus)$

[1] Máme tu na mysli uzátvorkovania *bez výmeny poradia,* ktoré už jednoznačne určujú výsledok operácie. Aspoň bez dôkazu spomeniem, že to isté platí aj pre ľubovoľný počet prvkov. Počet uzátvorkovaní výrazu s n prvkami je n-té *Catalanove číslo.*

2.2. Tvoria všetky permutácie na konečnej množine M grupu? Je táto grupa komutatívna? Urobte tabuľku grupovej operácie v prípade $M = \{1, 2, 3\}$.

2.3. Je $(\mathbb{R}, *)$, kde $a * b = ab + a + b$, grupa? Ak nie, vedeli by ste vynechať niektorý prvok a z množiny $\mathbb{R}$ tak, aby $(\mathbb{R} \setminus \{a\}, *)$ bola grupa?

2.4. Nech $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Je G s operáciou $\cdot$ (násobenie komplexných čísel) grupa? Označme $C_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$. Je $(C_n, \cdot)$ grupa?

2.5. Dokážte, že ak $(G, \cdot)$ je grupa a $x, y, z \in G$ tak platí

$$xy = xz \Rightarrow y = z;$$
$$yx = zx \Rightarrow y = z.$$

(Tzv. *zákony o krátení* v grupe.)

2.6. Nech $(G, *)$ je grupa a e je jej neutrálny prvok. Dokážte:
a) $x * y = y * x \Leftrightarrow x * y * x^{-1} * y^{-1} = e$.
b) Ak $x * x = e$ pre všetky $x \in G$, tak G je komutatívna.

2.7. Ak $(G, \circ)$ je grupa a $a \in G$ je nejaký jej prvok, tak zobrazenie $f_a \colon G \to G$ definované ako $f_a(b) = a \circ b$ je bijekcia.

2.8. Nech $(G, \circ)$ je grupa. Dokážte, že zobrazenie $f \colon G \to G$ definované ako $f(a) = a^{-1}$ je bijekcia.

2.9*. Nech G je neprázdna množina a $\circ$ je asociatívna binárna operácia na G. Potom G je grupa práve vtedy, keď pre ľubovoľné $a, b \in G$ majú rovnice

$$a \circ x = b$$
$$y \circ a = b$$

riešenie v G (inými slovami, pre ľubovoľné $a, b \in G$ existujú $x, y \in G$, ktoré spĺňajú tieto dve rovnosti.)

2.10*. Nech G je konečná množina a $\circ$ je binárna operácia na G taká, že platí asociatívny zákon a zákony o krátení. Dokážte, že G je grupa.

2.11*. Nech $*$ je binárna operácia na množine G, ktorá je
a) asociatívna,
b) existuje prvok $e \in G$ taký, že $(\forall x \in G) e * x = x$
c) pre každý prvok $x \in G$ existuje $y \in G$ také, že $x * y = e$ (kde e označuje prvok z časti b) t.j.

$$(\forall x \in G)(\exists y \in G) y * x = e.$$

Dokážte, že potom $(G, *)$ je grupa. (Všimnite si, že uvedené podmienky sa síce podobajú na definíciu neutrálneho a inverzného prvku, ale v oboch prípadoch tam máme iba jednu z dvoch rovností, ktoré vystupujú v definícii.)

2.12. Dokážte, že v konečnej grupe, ktorá má párny počet prvkov, existuje prvok rôzny od neutrálneho prvku taký, že $a \circ a = e$.

2.13. Nech konečná množina $G = \{e, a_1, \dots, a_n\}$ tvorí s operáciou $*$ komutatívnu grupu a e je jej neutrálny prvok. Dokážte, že $(a_1 * a_2 * \cdots * a_n)^2 = e$.

2.14. Nech $*$ je binárna operácia na množine A, taká, že pre každé $a, b, c \in A$ platí $a*(b*c) = (a*c)*b$ a $*$ má neutrálny prvok. Dokážte, že operácia $*$ je komutatívna a asociatívna.

2.15. Nech $(G, \circ)$ je grupa. Dokážte, že ak $x \circ x = x$, tak $x = e$.

2.16. Zistite, či $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \square)$, kde pre každé $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ definujeme $(a, b) \square (c, d) = (2ac, b + d)$, je grupa.

2.17. Nech $G = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Definujme na tejto množine binárnu operáciu $*$ predpisom $(a, b) * (c, d) = (a + bc, bd)$. Je to skutočne binárna operácia? Je $(G, *)$ grupa? Je to komutatívna grupa?

2.18. Nech $G = (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \setminus \{(0,0)\}))$. Definujme na tejto množine binárnu operáciu $*$ predpisom $(a,b) * (c,d) = (ac + 2bd, ad + bc)$. Je to skutočne binárna operácia? Je $(G, *)$ grupa? Je to komutatívna grupa?

2.19. Nech $(G, *_G)$ a $(H, *_H)$ sú grupy. Dokážte, že aj $G \times H$ s operáciou $*$ definovanou ako

$$(g_1, h_1) * (g_2, h_2) = (g_1 *_G g_2, h_1 *_H h_2)$$

je grupa.

2.20. Doplňte nasledujúcu tabuľku

	a	b	c	d
a				
b				d
c			d	
d				

tak aby ste dostali grupu.

2.21. Ak pre každý prvok x grupy $(G, \circ)$ platí $x \circ x = e$, tak táto grupa je komutatívna.

2.22. Nech G je grupa, e je jej neutrálny prvok a $a, b \in G$. Ukážte, že ak $(ab)^2 = e$, tak aj $(ba)^2 = e$.

2.23. Nech G je konečná *komutatívna* grupa, $|G| = n$. Neutrálny prvok tejto grupy označme e a jej prvky označme ako $a_1, \dots, a_n$ (t.j. $G = \{a_1, \dots, a_n\}$).
a) Ukážte, že pre ľubovoľné $a \in G$ platí $G = \{aa_1, \dots, aa_n\}$.
b) Ukážte, že pre ľubovoľné $a \in G$ platí $a^n = e$.
(Poznámka: Takéto tvrdenie platí aj pre nekomutatívnej grupy – v tom prípade ale treba použiť iný argument. Dá sa to odvodiť napríklad ako dôsledok Lagrangeovej vety, ktorú stručne spomenieme aj na tomto predmete.)

2.24. Nech G je konečná n-prvková množina, jej prvky označme ako $a_1, \dots, a_n$ (t.j. $G = \{a_1, \dots, a_n\}$). Nech ďalej $*$ je binárna operácia na G, ktorá má neutrálny prvok e, je asociatívna, komutatívna a platia pre ňu zákony o krátení.
a) Ukážte, že pre ľubovoľné $a \in G$ platí $G = \{aa_1, \dots, aa_n\}$.
b) Ukážte, že pre ľubovoľné $a \in G$ platí $a^n = e$.
(Poznámka: Takéto tvrdenie platí aj pre nekomutatívnej grupy – v tom prípade ale treba použiť iný argument. Dá sa to odvodiť napríklad ako dôsledok Lagrangeovej vety, ktorú stručne spomenieme aj na tomto predmete.)