Tabuľka grupy S_3:

	id	$\binom{1\,2\,3}{2\,1\,3}$	$\binom{1\,2\,3}{3\,2\,1}$	$\binom{1\,2\,3}{1\,3\,2}$	$\binom{1\,2\,3}{2\,3\,1}$	$\binom{1\,2\,3}{3\,1\,2}$
id	id	$\binom{1\,2\,3}{2\,1\,3}$	$\binom{1\,2\,3}{3\,2\,1}$	$\binom{1\,2\,3}{1\,3\,2}$	$\binom{1\,2\,3}{2\,3\,1}$	$\binom{1\,2\,3}{3\,1\,2}$
$\binom{1\,2\,3}{2\,1\,3}$	$\binom{1\,2\,3}{2\,1\,3}$	id	$\binom{1\,2\,3}{3\,1\,2}$	$\binom{1\,2\,3}{2\,3\,1}$	$\binom{1\,2\,3}{1\,3\,2}$	$\binom{1\,2\,3}{3\,2\,1}$
$\binom{1\,2\,3}{3\,2\,1}$	$\binom{1\,2\,3}{3\,2\,1}$	$\binom{1\,2\,3}{2\,3\,1}$	id	$\binom{1\,2\,3}{3\,1\,2}$	$\binom{1\,2\,3}{2\,1\,3}$	$\binom{1\,2\,3}{1\,3\,2}$
$\binom{1\,2\,3}{1\,3\,2}$	$\binom{1\,2\,3}{1\,3\,2}$	$\binom{1\,2\,3}{3\,1\,2}$	$\binom{1\,2\,3}{2\,3\,1}$	id	$\binom{1\,2\,3}{3\,2\,1}$	$\binom{1\,2\,3}{2\,1\,3}$
$\binom{1\,2\,3}{2\,3\,1}$	$\binom{1\,2\,3}{2\,3\,1}$	$\binom{1\,2\,3}{3\,2\,1}$	$\binom{1\,2\,3}{1\,3\,2}$	$\binom{1\,2\,3}{2\,1\,3}$	$\binom{1\,2\,3}{3\,1\,2}$	id
$\binom{1\,2\,3}{3\,1\,2}$	$\binom{1\,2\,3}{3\,1\,2}$	$\binom{1\,2\,3}{1\,3\,2}$	$\binom{1\,2\,3}{2\,1\,3}$	$\binom{1\,2\,3}{3\,2\,1}$	id	$\binom{1\,2\,3}{2\,3\,1}$

1 Podgrupy

H je podgrupa grupy $(G,*)$ ak H je neprázdna podmnožina G a platí:

- pre ľubovoľné $x,y \in H$ platí $x*y \in H$ a $x^{-1} \in H$;
- pre ľubovoľné $x,y \in H$ platí $x*y^{-1} \in H$.

Každá podgrupa obsahuje neutrálny prvok.

1.1. Nájdite všetky podgrupy grupy S_3. (LAG1 1.4.6.(8))

1.2. Nech $(G,*)$ je grupa a $H \neq \emptyset$ je konečná podmnožina taká, že pre ľubovoľné $x,y \in H$ platí $x*y \in H$. Potom H je podgrupa grupy G. (LAG1 1.4.6(4))

1.3. Ukážte, že $H = \{\frac{m}{n}; m,n \text{ sú nepárne}\}$ je podgrupa grupy $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$.

1.4. Je množina $A = \{a + b\sqrt{2}; a,b \in \mathbb{Q}\}$ podgrupa grupy $(\mathbb{R},+)$?

1.5. Nájdite všetky podgrupy grupy $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ a všetky podgrupy grupy $\mathbb{Z}_4$ (v oboch prípadoch operácia $\oplus$). Majú tieto grupy rovnaký počet dvojprvkových podgrúp? (Viete na základe výsledku zdôvodniť, že tieto dve grupy nie sú izomorfné?)

1.6. Je množina $H = \{\ln a; a \in \mathbb{Q}, a > 0\}$ podgrupou grupy $(\mathbb{R},+)$?

1.7. Nech H je podgrupa grupy G. Nech $g \in G$. Ukážte, že $gHg^{-1} = \{ghg^{-1}; h \in H\}$ je podgrupa grupy G.

1.8. Nech $M \neq \emptyset$ a G je množina všetkých bijektívnych zobrazení z M do M. Je $\circ$ binárna operácia na G? Je $(G,\circ)$ grupa? Je komutatívna?

1.9. Uvažujme funkcie $f_i \colon \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ definované ako $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 1/x$, $f_3(x) = 1-x$, $f_4(x) = 1/(1-x)$, $f_5(x) = (x-1)/x$, $f_6(x) = x/(x-1)$. Dokážte, že $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ s operáciou skladania zobrazení tvorí grupu. Zostavte tabuľku grupovej operácie a zistite, či je táto grupa izomorfná s grupou S_3.

1.10. Nájdite príklad nekonečnej grupy, ktorá obsahuje netriviálnu konečnú podgrupu. (Pod netriviálnou podgrupou tu rozumieme podgrupu, ktorá má viac ako jeden prvok.)

1.11*. Nech G je grupa a H_1, H_2 sú jej podgrupy. Dokážte, že $H_1 \cup H_2$ je podgrupa práve vtedy, keď $H_1 \subseteq H_2$ alebo $H_2 \subseteq H_1$.

1.12*. Ak A, B, C sú podgrupy grupy G a $C \subseteq A \cup B$, tak $C \subseteq A$ alebo $C \subseteq B$.

1.13. Nech $(G_1,*_1)$, $(G_2,*_2)$ sú grupy. Zoberme grupu $(G_1 \times G_2, *)$, kde

$$(a,b)*(a',b') = (a *_1 a', b *_2 b'),$$

t.j. G je priamy súčiny grúp $G_1 \times G_2$.
a) Ukážte, že ak H_1 je podgrupa G_1 a H_2 je podgrupa G_2, tak $H_1 \times H_2$ je podgrupa grupy $G_1 \times G_2$.
b) Nájdite príklad grúp G_1, G_2 takých, že $G_1 \times G_2$ má podgrupu, ktorá sa nedá dostať ako $H_1 \times H_2$ pre žiadne $H_1 \subseteq G_1$, $H_2 \subseteq G_2$.

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1						
f_2						
f_3						
f_4						
f_5						
f_6						

2 Homomorfizmy grúp

$f\colon (G,*) \to (H,\Box)$

$$f(x*y) = f(x)\Box f(y)$$

2.1. Dokážte: Nech $(G,*)$ a $(H,\circ)$ sú grupy a G je komutatívna. Ak existuje izomorfizmus $f\colon G \to H$, tak aj $(H,\circ)$ je komutatívna grupa. (Teda grupa izomorfná s komutatívnou grupou je komutatívna.) Platí toto tvrdenie, ak predpoklad o existencii izomorfizmu nahradíme požiadavkou na existenciu homomorfizmu? Čo sa stane, ak budeme požadovať existenciu surjektívneho homomorfizmu (=epimorfizmu)?

2.2. Zistite, či sú grupy $(\mathbb{Z}_4,+)$ a $(\mathbb{Z}_5\setminus\{0\},\cdot)$ izomorfné.

2.3. Sú grupy $(S_3,\circ)$ a $(\mathbb{Z}_6,+)$ izomorfné?

2.4. Sú grupy $(\mathbb{Z}_6,+)$ a $(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3,+)$ izomorfné? (Operáciu $+$ na množine $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$ chápeme po zložkách, t.j. $(x_1,y_1)+(x_2,y_2) = (x_1\oplus_2 x_2, y_1\oplus_3 y_2)$. Operácie $\oplus_2$ a $\oplus_3$ označujú sčitovanie modulo 2 resp. modulo 3 – na tomto mieste som použil iné označenie, aby som zdôraznil, že na prvej a na druhej súradnici máme inú operáciu.)

2.5. Sú grupy $(\mathbb{Z}_4,+)$ a $(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,+)$ izomorfné?

2.6. Nájdite všetky homomorfizmy $(S_3,\circ)\to(\mathbb{Z}_2,+)$.

2.7. Nech $(G,*)$ je ľubovoľná grupa. Dokážte, že zobrazenie $g\mapsto g*g$ je homomorfizmus z G do G práve vtedy, keď G je komutatívna.

2.8. Nech $(G,*)$ je grupa. Dokážte, že zobrazenie $g\mapsto g^{-1}$ je homomorfizmus z G do G práve vtedy, keď G je komutatívna.

2.9. Dá sa výsledok z predchádzajúceho cvičenia použiť na iný dôkaz toho, že $(a_1*a_2*\cdots*a_n)^2 = e$ platí pre konečnú komutatívnu grupu $G=\{e,a_1,\dots,a_n\}$?

2.10. Nech $f,g\colon G\to H$ sú homomorfizmy grúp. Je množina $\{a\in G; f(a)=g(a)\}$ podgrupa grupy G?

2.11. Nech $(G,*)$ je grupa. Ukážte, že $(G,*')$ s operáciou definovanou ako[1]

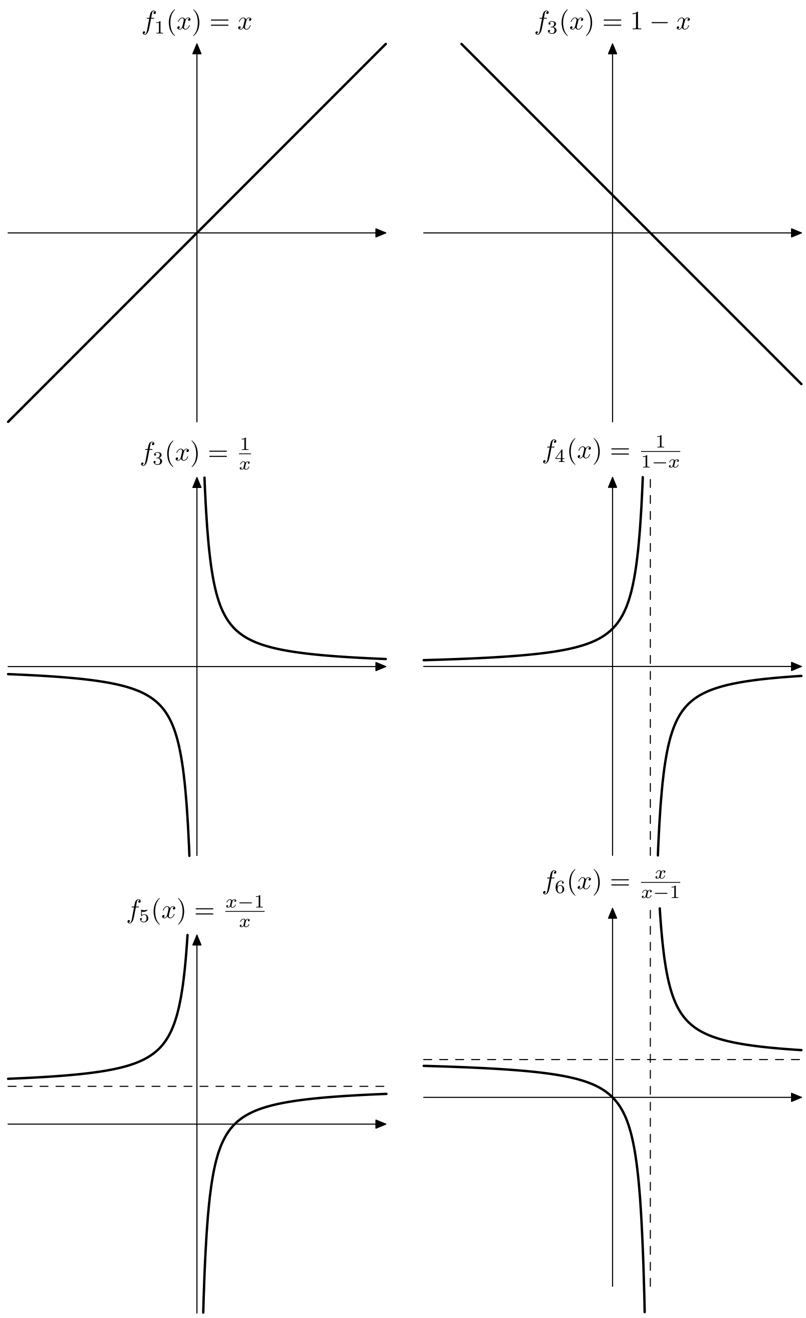
$$x*'y = y*x$$

je tiež grupa a že tieto dve grupy sú izomorfné, t.j. $(G,*)\cong(G,*')$.

2.12. V tejto úlohe môžete používať fakt, že počet prvkov podgrupy je deliteľ počtu prvkov grupy (Lagrangeova veta) – aj keď tento výsledok dokážeme až neskôr.
a) Nájdite všetky podgrupy grupy $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4$. Je táto grupa izomorfná s grupou $\mathbb{Z}_8$?
b) Nájdite všetky podgrupy grupy $\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$. Je táto grupa izomorfná s grupou $\mathbb{Z}_9$?

2.13. Ukážte, že grupa $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_5$ je izomorfná s grupou $\mathbb{Z}_{10}$.

[1] Wikipédia: Opposite group `https://en.wikipedia.org/wiki/Opposite_group`



Obr. 1: Grupa zo šiestich funkcií $f_1, \ldots, f_6$