1 Relácie ekvivalencie

Relácia na množine M je ľubovoľná podmnožina $R \subseteq M \times M$. Relácia ekvivalencie je taká relácia, ktorá je

- reflexívna: $(\forall x \in M)\ (x,x) \in R$;
- symetrická: $(\forall x,y \in M)\ (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$;
- tranzitívna: $(\forall x,y,z \in M)\ (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$

Triedy ekvivalencie:

$$[x] = \{y \in M; x \sim y\}$$

1.1. Overte, či relácia R je relácia ekvivalencie na množine M.
a) M je ľubovoľná množina, $R = M \times M$;
b) M je ľubovoľná množina, $R = \{(x,x); x \in M\}$
c) $M = \mathbb{R}$, $R = \{(x,y) \in M \times M; x - y \in \mathbb{Z}\}$;
d) $M = \mathbb{Z}^2$, $R = \{((a,b),(c,d)) \in M \times M; a + d = b + c\}$;
e) $M = \mathbb{N}^2$, $R = \{((a,b),(c,d)) \in M \times M; a + d = b + c\}$;
f) $M = \mathbb{R}$, $R = \{(a,b) \in M \times M; |a - b| \leq 1\}$;
g) $M = \mathbb{R}$, $R = \{(x,y) \in M \times M; x^2 = y^2\}$;
h) $M = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, t.j. M je množina všetkých podmnožín množiny $\mathbb{N}$ a $R = \{(A,B) \in M \times M; A \triangle B$ je konečná$\}$ (t.j. množiny A a B sú v relácii R, ak ich symetrický rozdiel $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ je konečná množina);
i) $M = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $R = \{(A,B) \in M \times M;$ existuje bijekcia z A do $B\}$;
j) $M = \mathbb{Z}$; $R = \{(x,y) \in M \times M; 3 \mid x + 2y\}$;
k) $M = \mathbb{R}$, $R = \{(x,y) \in M \times M; x - y \in \mathbb{Q}\}$;
l) $M = \mathbb{R}^2$; $R = \{((x_1,x_2),(y_1,y_2) \in M \times M; x_1 = y_1)\}$;
m) $M = \mathbb{R}^2$; $R = \{((x_1,x_2),(y_1,y_2) \in M \times M; x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2)\}$;
n) $M = \mathbb{R}^2$; $R = \{((x_1,x_2),(y_1,y_2) \in M \times M; x_1 = y_2 \wedge x_2 = y_1)\}$;
o) $M = \mathbb{R}^2$; $R = \{((x_1,x_2),(y_1,y_2) \in M \times M; x_1 = y_1 \vee x_2 = y_2)\}$;
p) $M = \{f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\}$, t.j. M je množina všetkých zobrazení zo $\mathbb{Z}$ do $\mathbb{Z}$; $R = \{(f,g) \in M \times M; f(1) = g(1)\}$;
q) $M = \{f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\}$, t.j. M je množina všetkých zobrazení zo $\mathbb{Z}$ do $\mathbb{Z}$; $R = \{(f,g) \in M \times M; f(1) = g(0)\}$;
r) $M = G$, kde $(G,\circ)$ je grupa, H je podgrupa grupy G a $R = \{(x,y) \in M \times M; xy^{-1} \in H\}$. Sú niektoré relácii uvedených v ostatných častiach špeciálne prípady tejto relácie?
s) M je ľubovoľná množina, $f\colon M \to S$ je ľubovoľné zobrazenie a $R = \{(x,y) \in M \times M; f(x) = f(y)\}$. (=LAG1, 1.6.12(1)) Sú niektoré relácii uvedených v ostatných častiach špeciálne prípady tejto relácie?

1.2. Koľko existuje relácií ekvivalencie na trojprvkovej množine $\{0,1,2\}$?

1.3. Dokážte: Ak R_1 a R_2 sú relácie ekvivalencie na tej istej množine M, tak aj $R = R_1 \cap R_2$ je relácia ekvivalencie na M. (Všimnite si, že $(a,b) \in R \Leftrightarrow (a,b) \in R_1 \wedge (a,b) \in R_2$.) Platí podobné tvrdenie aj pre zjednotenie relácií ekvivalencie?

2 Faktorové grupy

Ak máme komutatívnu grupu $(G,+)$ a nejakú jej podgrupu H, tak predpis[1]

$$x \sim y \qquad \Leftrightarrow \qquad x - y \in H$$

určuje reláciu ekvivalencie na množine G.

[1] Ak by sme označovali operáciu ako $\cdot$, tak by sme tú istú podmienku zapísali ako $xy^{-1} \in H$.

Množinu všetkých tried tejto ekvivalencie označíme ako G/H, t.j.

$$G/H = \{[a]; a \in G\}.$$

Predpis

$$[a] + [b] = [a + b]$$

potom určuje dobre definovanú binárnu operáciu na množine G/H. Dá sa dokázať, že G/H s touto operáciou tvorí grupu. Túto grupu voláme faktorová grupa grupy $(G, +)$ podľa podgrupy H.

Veta o faktorovom izomorfizme. Nech G, G' sú grupy, navyše G je komutatívna.[2] Ak $f: G \to G'$ je surjektívny homomorfizmus, tak $\operatorname{Ker} f$ je podgrupa grupy G a platí

$$G/\operatorname{Ker} f \cong G',$$

t.j. faktorová grupa G podľa $\operatorname{Ker} f$ je izomorfná s G'.

2.1. Ukážte, že faktorová grupa G/H je izomorfná s grupou K. (Aspoň jednu úlohu skúste vyriešiť priamo pomocou definície faktorovej grupy a aspoň jednu úlohu pomocou vety o faktorovom izomorfizme.)
 a) $G = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$, $H = \{(x, y); x + 2y = 0\}$, $K = (\mathbb{R}, +)$;
 b) $G = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$, $H = \{(x, 3x); x \in \mathbb{R}\}$, $K = (\mathbb{R}, +)$;
 c) $G = (\mathbb{C}, +)$, $H = \mathbb{R}$, $K = (\mathbb{R}, +)$;
 d) $G = (\mathbb{Z}_8, +)$, $H = 2\mathbb{Z}_4 = \{0, 2, 4, 6\}$, $K = (\mathbb{Z}_2, +)$;
 e) $G = (\mathbb{Z}_8, +)$, $H = 4\mathbb{Z}_2 = \{0, 4\}$, $K = (\mathbb{Z}_4, +)$;
 f) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, $H = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $K = \{c \in \mathbb{C}; |c| = 1\}$;
 g) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, $H = \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$, $K = \{c \in \mathbb{C}; |c| = 1\}$;
 h) $G = (\mathbb{Z}, +)$, $H = 4\mathbb{Z} = \{4z; z \in \mathbb{Z}\}$, $K = \mathbb{Z}_4$;
 i) $G = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $H = \mathbb{R}^+$, $K = (\mathbb{Z}_2, +)$;
 j) $G = (\mathbb{R}^*, \cdot)$, $H = \{\pm 1\}$, $K = (\mathbb{R}^+, \cdot)$

2.2. Zistite, či dané grupy sú izomorfné. V celom cvičení budeme ako S označovať grupu $(\{c \in \mathbb{C}; |c| = 1\}, \cdot)$ (prípadne množinu prvkov tejto grupy) a $C_n = (\{c \in \mathbb{C}; c^n = 1\}, \cdot)$
 a) $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)/\{c \in \mathbb{C}; c^n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)/\mathbb{R}^+$ (pod $\mathbb{R}^+$ tu myslíme kladné reálne čísla, čiže $0 \notin \mathbb{R}^+$), S
 b) $(\mathbb{R}, +)/\mathbb{Z}$, S/C_n, S
 c) $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)/C_n$
 d) $(\{c \in \mathbb{C}; c^n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}, \cdot)/\mathbb{R}^+$, C_n
 e) $(\{c \in \mathbb{C}; c^n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}, \cdot)/C_n$, $\mathbb{R}^+$
 f) C_{12}/C_4, $\mathbb{Z}_3$
 g) $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, +)/(\mathbb{Z}_2 \times \{0\})$, $\mathbb{Z}_3$

2.3. Nech G je komutatívna grupa a H je jej podgrupa. Ukážte, že zobrazenie $f(x) = x + h$ je bijekcia medzi H a $[x]_H$. (T.j. pre každú triedu rozkladu G podľa H máme bijekciu medzi H a $[x]_H$.)

2.4. S využitím predošlej úlohy dokážte, že ak G je konečná komutatívna grupa a H je jej podgrupa, tak počet prvkov H delí počet prvkov G. (T.j. $|G|$ je násobkom $|H|$.)[3]

---

[2] Tento predpoklad je tu iba preto, aby vôbec malo zmysel hovoriť o faktorovej podgrupe. Ak sa neskôr budete učiť o normálnych podgrupách, tak zistíte, že faktorové grupy sa dajú robiť aj pre nekomutatívne grupy. Vtedy to však nebude fungovať s ľubovoľnou podgrupou. Matematici by sa s tým mali stretnúť na predmete Algebra (1) v druhom ročníku. Poistní matematici na predmete Úvod do vysokoškolskej matematiky (2).

[3] Táto vlastnosť platí aj pre grupy, ktoré nie sú komutatívne. Neskôr sa s ňou ešte stretnete pod názvom *Lagrangeova veta*.