1 Lineárna závislosť a nezávislosť

1.1. Overte, že $\mathbb{R}$ je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{Q}$. Dokážte, že v tomto priestore sú 1, $\sqrt{2}$ a $\sqrt{3}$ lineárne nezávislé.

1.2. Ukážte, že vo vektorovom priestore $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$ (z predošlej úlohy) sú lineárne nezávislé vektory $1+3\sqrt{2}$ a $2-\sqrt{2}$.

1.3. Sú 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ lineárne nezávislé vo vektorovom priestore $\mathbb{R}$ nad poľom $\mathbb{Q}$? (Hint: Úlohu môže o niečo zjednodušiť, ak sa pozriete na 1 a $\sqrt{3}$ ako prvky priestoru $\mathbb{R}$ nad poľom $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a+b\sqrt{2}; a,b \in \mathbb{Q}\}$.)

1.4. Zistite, či dané vektory sú lineárne závislé v príslušnom vektorovom priestore:
a) (1,2,3), (1,3,2), (2,1,5) v $\mathbb{R}^3$,
b) (1,2,3), (1,3,2), (2,1,5), (1,127,3) v $\mathbb{R}^3$,
c) (1,3,4), (2,1,3), (3,1,4) v $\mathbb{Z}_5^3$
d) (1,3,4), (2,1,3), (3,1,4) v $\mathbb{Z}_7^3$.

1.5. Zistite, či sú nasledujúce funkcie lineárne závislé vo vektorovom priestore všetkých funkcií z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$:
a) $x+1$, x^2, x^3,
b) 1, $x+a$, x^2+bx+c (a,b,c môžu byť ľubovoľné reálne čísla),
c*) 1, $\cos x$, $\cos^2(\frac{x}{2})$,
d) x, $x(x-1)$, $x(x-1)(x-2)$,
e) 1, $\cos x$, $\cos 2x$.

2 Báza a dimenzia

2.1. Zistite, či dané vektory tvoria bázu v $\mathbb{R}^3$:
a) (1,2,3), (1,-2,3), (1,2,-3)
b) (1,1,1), (1,1,0), (1,0,1)
c) (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1).

2.2. Zistite, či dané vektory tvoria bázu v $\mathbb{Z}_5^3$:
a) (1,2,3), (2,3,4), (0,3,1)
b) (1,0,0), (0,1,2), (2,1,3)
c) (0,1,2), (3,0,1), (1,0,2).

2.3. P_n označme priestor všetkých polynómov stupňa najviac n. Overte, že $d(P_n) = n+1$ a že $1, x-1, \dots (x-1)^n$ je báza tohoto priestoru.

2.4. Určte dimenziu podpriestoru $[\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}]$, ak $\vec{\alpha} = (1,3,2,1)$, $\vec{\beta} = (4,9,5,4)$ a $\vec{\gamma} = (3,7,4,3)$ v $\mathbb{R}^4$.

2.5. Nájdite bázu a dimenziu podpriestoru $P = [(1,1,1,3),(1,2,3,6),(1,6,6,6),(3,1,4,1)]$ priestoru $\mathbb{Z}_7^3$.

2.6. Ak sa to dá, doplňte dané vektory na bázu príslušného vektorového priestoru:
a) (1,1,2), (2,1,3) v $\mathbb{R}^3$,
b) x^2-1, x^2+1 v priestore polynómov stupňa najviac 3,
c) (1,2,3,0), (3,4,1,2) v $\mathbb{Z}_5^4$.

2.7. Ak každý z vektorov $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_k$ je lineárnou kombináciou vektorov $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_m$, tak $d([\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_k]) \le d([\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_m])$.

2.8*. a) Nech $F = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{2^2}; a,b,c \in \mathbb{Q}\}$. Aká je dimenzia F, ak ho chápeme ako vektorový priestor nad poľom $\mathbb{Q}$?
b) Vedeli by ste tento fakt využiť na zdôvodnenie, že pre ľubovoľný prvok $\alpha \in F \setminus \{0\}$ existuje v F inverzný prvok vzhľadom na násobenie? (Hint: Skúste sa pozrieť na vektory 1, α, α^2, α^3 v tomto vektorovom priestore.)[1]

[1] Tento príklad ukazuje, že keď už vieme nejaké veci o vektorových priestoroch, tak sa dá oveľa jednoduchšie

2.9*. a) Nech $p_1, \ldots, p_k$ sú navzájom rôzne prvočísla. Ukážte, že čísla $\ln p_1, \ln p_2, \ldots, \ln p_k$ sú lineárne nezávislé ako prvky vektorového priestoru $\mathbb{R}$ nad poľom $\mathbb{Q}$.
b) Ukážte, že vektorový priestor $\mathbb{R}$ nad poľom $\mathbb{Q}$ je nekonečnorozmerný.[2]

3 Súčty podpriestorov

Súčet podpriestorov je definovaný ako

$$S + T = \{\vec{s} + \vec{t}; \vec{s} \in S, \vec{t} \in T\}.$$

Jeho dimenziu môžeme (pre konečnorozmerné S a T) vyjadriť pomocou Grassmannovho vzorca[3]

$$d(S+T) = d(S) + d(T) - d(S \cap T)$$
$$d(S+T) + d(S \cap T) = d(S) + d(T)$$

3.1. Zistite[4] $d(U)$, $d(V)$, $d(U+V)$, $d(U \cap V)$, bázu $U+V$ a bázu $U \cap V$
a) v $\mathbb{R}^2$ pre $U = [(2,5)]$, $V = [(1,3)]$
b) v $\mathbb{R}^3$ pre $U = [(1,2,3), (-1,2,3)]$, $V = [(2,1,4), (-2,1,4)]$
c) v $\mathbb{R}^4$ pre $U = [(1,0,1,0), (1,0,0,1)]$, $V = [(1,1,1,0), (1,0,1,1)]$
d) v $\mathbb{R}^4$ pre $U = [(1,2,3,4), (1,1,1,1), (4,3,2,1)]$, $V = [(1,1,0,0), (0,0,1,1), (1,0,0,0)]$.
[a)1,1,2,0; b)2,2,3,1; c)2,2,4,0; d)2,3,4,1]

3.2. Nech $T = [(1,3,2), (2,1,3), (3,4,0)]$ je podpriestor $(\mathbb{Z}_5)^3$. Existuje podpriestor S taký, že $(\mathbb{Z}_5)^3 = T \oplus S$? Ak áno, nájdite ho! Je tento podpriestor jednoznačne určený?

3.3. Dokážte, že ak $\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_k}$ je báza vektorového priestoru V, tak $V = [\vec{e_1}] \oplus \ldots \oplus [\vec{e_k}]$.

3.4. Ak máme zadané podpriestory

$$W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x + y - z = 0\},$$
$$W_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 3x + y - 2z = 0\},$$
$$W_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x - 7y + 3z = 0\},$$

nájdite $\dim(W_1 \cap W_2 \cap W_3)$ a $\dim(W_1 + W_2)$, $\dim(W_1 + W_3)$, $\dim(W_2 + W_3)$.

3.5. Nájdite príklad vektorového priestoru a podpriestorov $W_{1,2,3}$ takých, že[5]

$$\dim(W_1 + W_2 + W_3) \neq \dim(W_1) + \dim(W_2) + \dim(W_3) - \\ - \dim(W_1 \cap W_2) - \dim(W_1 \cap W_3) - \dim(W_2 \cap W_3) + \dim(W_1 \cap W_2 \cap W_3)$$

dokázať, že táto množina tvorí pole. Podobné typy úvah ešte stretnete aj na iných predmetoch, keď sa budete učiť o rozšíreniach polí.

[2]Neskôr uvidíme jednoduchšie zdôvodnenie toho, že tento priestor nie je konečnorozmerný – budeme ale potrebovať vedieť nejaké veci o lineárnych izomorfizmoch a tiež o spočítateľných a nespočítateľných množinách.

[3]Tento vzorec sa ľahko pamätá, keďže sa podobá na vyjadrenie pre počet prvkov zjednotenia dvoch množín:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Pri počte prvkov máme podobné vyjadrenie aj pre viac než dve množiny – pre podpriestory už analogické tvrdenie neplatí.

[4]Pri tejto úlohe sa môže hodiť používať elementárne riadkové operácie a úpravu na redukovaný stupňovitý tvar. (Zaradil som ju už do tejto sady – t.j. zhruba v čase, keď sa preberajú súčty podpriestorov.)

[5]Toto ukazuje, že neplatí analógia vzťahu $|A \cup B \cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$. Pre zaujímavosť pridám aj takúto linku: `https://mathoverflow.net/q/23478` Examples of common false beliefs in mathematics.