Ak A je typu $m \times \boxed{n}$ a B je typu $\boxed{n} \times k$, tak súčin $C = AB$ má rozmery $m \times k$ a

$$c_{ij} := a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}b_{tj}.$$

Matica lineárneho zobrazenia $f\colon R^k \to R^n$ je matica typu $k \times n$ nad poľom R, ktorej i-ty riadok je vektor $f(\vec{e}_i)$, t.j. obraz i-teho vektora zo štandardnej bázy.

Súčin matíc a skladanie lineárnych zobrazení:

$$M_{g\circ f} = M_f \cdot M_g$$

Obraz vektora a súčin:

$$f(\vec{x}) = \vec{x} \cdot M_f$$

1 Lineárne zobrazenia

1.1. Nech V a W sú vektorové priestory nad poľom F a $f\colon V \to W$ je lineárne zobrazenie. Ak $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n$ sú lineárne závislé vektory, tak aj $f(\vec{\alpha}_1), \ldots, f(\vec{\alpha}_n)$ sú lineárne závislé vektory.

1.2. Nech $f\colon V \to W$ je lineárne zobrazenie z vektorového priestoru V do vektorového priestoru W nad poľom F. Dokážte:
Ak S je podpriestor vektorového priestoru V, tak $f[S] = \{f(\vec{\alpha}); \vec{\alpha} \in S\}$ je podpriestor vektorového priestoru W.
Ak T je podpriestor vektorového priestoru W, tak $f^{-1}[T] = \{\vec{\alpha} \in V : f(\vec{\alpha}) \in T\}$ je podpriestor vektorového priestoru V.

1.3*. a) Ukážte, že ak V je konečnorozmerý vektorový priestor nad poľom $\mathbb{Q}$, tak V je spočítateľná množina.[1] b) Ukážte, že vektorový priestor $\mathbb{R}$ nad poľom $\mathbb{Q}$ je nekonečnorozmerný.

2 Súčin matíc

2.1. Vypočítajte $A^2 + 2AB + B^2$, $A^2 + 2BA + B^2$, $A^2 + AB + BA + B^2$, $(A + B)^2$, ak $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

2.2. Vyrátajte EA a AE pre $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ a a) $E = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ b) $E = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ c) $E = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ d) $E = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Vedeli by ste nájsť riadkovú/stĺpcovú operáciu, pomocou ktorej dostaneme z matice A maticu EA resp. AE? (Viac sa o súvise násobenia matíc a elementárnych riadkových/stĺpcových operácií môžete dozvedieť v LAG1 v časti 4.4).

2.3. Pre štvorcovú maticu C typu $n \times n$ budeme výraz $\mathrm{Tr}(C) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_{nn}$ nazývať *stopa matice* C.
Ukážte, že ak A, B sú matice typu $n \times n$ nad poľom F, tak platia rovnosti $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A)^T$ a $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
Zistite, či pre ľubovoľné matice A, B, C typu $n \times n$ platia vzťahy $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(CBA)$ a $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(ACB)$. (Svoje tvrdenie zdôvodnite!) Ak niektorý z týchto vzťahov neplatí, bude platiť za dodatočného predpokladu, matica A je symetrická?

2.4. Nech $C = AB$, kde A, B sú matice. Musí potom platiť $S_C \subseteq S_A$? Musí platiť $S_C \subseteq S_B$? Musí platiť $S_A \subseteq S_C$, $S_B \subseteq S_C$? (Pripomeňme, že S_A je podpriestor generovaný riadkami matice A.)

[1] Táto úloha sa dá riešiť, ak už z iných predmetov viete základné veci o spočítateľných množinách.

2.5. Nech A, B sú matice nad poľom F typu $m \times n$ resp. $n \times k$. Dokážte, že $h(AB) \leq h(A)$. Dokážte, že ak $n = k$ a B je regulárna, tak $h(AB) = h(A)$.

2.6. Nech A, B sú matice nad poľom F typu $m \times n$ resp. $n \times k$. Dokážte, že $h(AB) \leq h(B)$. Dokážte, že ak $m = n$ a A je regulárna, tak $h(AB) = h(B)$.

2.7. Nech $A, B \in M_{m,n}(F)$. Dokážte: Matice A, B sú riadkovo ekvivalentné práve vtedy, keď existuje regulárna matica $R \in M_{m,m}(F)$ taká, že $B = RA$.

2.8. Nech A je štvorcová matica (nad nejakým poľom F). Dokážte: Matica A je regulárna práve vtedy, keď A sa dá dostať ako súčin nejakých matíc elementárnych riadkových operácií. (T.j. $A = E_1 E_2 \dots E_k$, kde každá z matíc $E_1, E_2, \dots, E_k$ zodpovedá nejakej ERO.)

3 Matica zobrazenia

3.1. Nájdite maticu lineárneho zobrazenia $f\colon (\mathbb{Z}_7)^2 \to (\mathbb{Z}_7)^2$ a napíšte jeho predpis.
a) $f(1,1) = (0,1)$, $f(6,1) = (3,2)$
b) $f(2,3) = (1,0)$, $f(3,2) = (6,1)$

3.2. Nájdite maticu lineárneho zobrazenia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, pre ktoré platí:
a) $f(2,0,3) = (1,2,-1,1)$, $f(4,1,5) = (4,5,-2,1)$, $f(3,1,2) = (1,-1,1,-1)$,
b) $f(2,0,3) = (1,2,-1,1)$, $f(4,1,5) = (4,5,-2,1)$, $f(2,-1,4) = (-1,1,-1,2)$,
c) $f(2,0,3) = (1,2,-1,1)$, $f(4,1,5) = (4,5,-2,1)$, $f(2,-1,4) = (1,-1,1,-1)$.

3.3. Nájdite maticu lineárneho zobrazenia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ takého, že:
a) $f(1,2,3,3) = (0,0,0,0)$, $f(1,1,3,2) = (1,0,3,1)$, $f(1,1,2,0) = (2,0,1,0)$, $f(1,0,3,1) = (2,1,3,1)$
b) $f(1,2,3,4) = (-1,-1,4,1)$, $f(1,1,3,2) = (1,0,3,1)$, $f(1,1,2,0) = (2,0,1,0)$, $f(1,0,3,1) = (2,1,3,1)$
c) $f(0,1,1,1) = (1,0,0,0)$, $f(1,0,1,1) = (0,1,0,0)$, $f(1,1,0,1) = (0,0,1,0)$, $f(1,1,1,0) = (0,0,0,1)$

3.4. Koľko existuje lineárnych zobrazení spĺňajúcich zadané podmienky? Koľko z nich je injektívnych? Koľko je surjektívnych?
a) $f\colon \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^4$, $f(1,3,1) = (1,1,1,3)$, $f(2,1,3) = (0,1,3,4)$, $f(2,1,0) = (1,4,0,0)$;
b) $f\colon \mathbb{Z}_5^4 \to \mathbb{Z}_5^3$, $f(1,0,3,1) = (0,1,3)$, $f(2,1,3,1) = (1,1,3)$, $f(1,1,4,1) = (2,2,1)$;
c) $f\colon \mathbb{Z}_5^4 \to \mathbb{Z}_5^3$, $f(1,0,3,1) = (0,1,3)$, $f(2,1,3,1) = (1,1,3)$, $f(1,1,0,0) = (1,0,0)$;

4 Jadro a obraz

Ak $f\colon V \to W$ je lineárne zobrazenie, tak platí

$$\dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim(V),$$

kde

$$\operatorname{Ker} f = \{\vec{x} \in V; f(\vec{x}) = \vec{0}\},$$
$$\operatorname{Im} f = \{f(\vec{x}); \vec{x} \in V\}.$$

Navyše platí veta o izomorfizme:

$$V/\operatorname{Ker} f \cong \operatorname{Im} f.$$

4.1. Nájdite bázu obrazu a bázu jadra lineárneho zobrazenia $f\colon (\mathbb{Z}_5)^4 \to (\mathbb{Z}_5)^4$ s danou maticou. V ktorých prípadoch je toto zobrazenie surjektívne a v ktorých injektívne?
$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

4.2. Nájdite bázu a dimenziu $\operatorname{Ker} f$ aj $\operatorname{Im} f$ pre dané lineárne zobrazenie. Rozhodnite, či toto zobrazenie je injektívne, surjektívne, bijektívne.
a) $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, 2x_2 + x_3 + x_4, 4x_2 + 2x_3 + 2x_4)$.
b) $f\colon M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R})$, $f\colon \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} a+b & b+c \\ c+d & d+a \end{smallmatrix}\right)$
c) $f\colon M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R})$, $f(A) = A - A^T$
d) $f\colon V \to V$, kde $V = \{ax^2 + bx + c; a, b, c \in \mathbb{R}\}$ je podpriestor $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ a $f\colon p(x) \mapsto p'(x)$. (T.j. f priradí polynómu $p(x)$ jeho deriváciu.)

4.3. Definujme lineárne zobrazenie $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ ako $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4, 2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4)$ a označme $U_1 = \operatorname{Ker} f$.
Ďalej definujme lineárne zobrazenie $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ ako $g(y_1, y_2) = (y_1 - y_2, y_1 - 3y_2, 2y_1 - 8y_2, 3y_1 - 27y_2)$ a označme $U_2 = \operatorname{Im} g$.
Vidíme, že U_1 aj U_2 sú podpriestory $\mathbb{R}^4$.
Nájdite bázy priestorov U_1, U_2, $U_1 \cap U_2$ a $U_1 + U_2$.

4.4. Nech $f\colon V \to V$ je lineárne zobrazenie. Ako f^2 budeme označovať $f \circ f$. Dokážte

(a) $\operatorname{Ker} f^2 \supseteq \operatorname{Ker} f$,

(b) $\operatorname{Im} f^2 \subseteq \operatorname{Im} f$,

(c) $f^2 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Ker} f \supseteq \operatorname{Im} f$.

4.5. Nájdite $\operatorname{Ker} T_A$, $\operatorname{Im} T_A$, kde $T_A\colon M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R})$ je dané predpisom

$$T_A(X) = AX - XA$$

pre $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, t.j.,

$$T_A(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4.6. Nech A je ľubovoľná matica typu $n \times n$ nad poľom F. Označme $T_A(X) = AX - XA$.
a) Ukážte, že $T_A\colon M_{n,n}(F) \to M_{n,n}(F)$ je lineárne zobrazenie.
b) Je T_A injektívne?
c) Je T_A surjektívne?

5 Inverzná matica

5.1. Nájdite inverznú maticu k daným maticiam nad $\mathbb{R}$:
$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & \sqrt{6} \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Výsledky:
$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ -1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -9 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5.2. Zistite, či je zadaná matica nad poľom $\mathbb{Z}_5$ regulárna; ak áno, nájdite inverznú:
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$
Výsledky: $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

5.3. Nech $f\colon (\mathbb{Z}_5)^4 \to (\mathbb{Z}_5)^4$ je lineárne zobrazenie také, že $f(1,2,3,1) = (2,0,1,0)$, $f(0,2,3,1) = (1,2,0,3)$, $f(1,0,3,4) = (3,2,1,0)$, $f(4,1,3,2) = (2,3,1,1)$. Nájdite maticu zobrazenia f^{-1}.

5.4. Zistite, či matica $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ je regulárna a) nad $\mathbb{Z}_2$ b) nad $\mathbb{Z}_3$, ak áno, nájdite inverznú maticu.

5.5. Zistite pre aké hodnoty parametra $a \in \mathbb{R}$ existuje A^{-1}. Pre tieto hodnoty aj vyjadrite, čomu sa A^{-1} rovná.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

5.6. Vypočítajte $A^{-1}B$ a $B^{-1}A$. Skúste to urobiť bez výpočtu A^{-1} resp. B^{-1}.
$A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$
Ako skúšku správnosti môžete vyskúšať, či po vynásobení výsledku zľava maticou A (resp. B) dostanete maticu B (resp. A).

5.7. Zistite, či pre dané matice A, B nad poľom $\mathbb{Z}_5$ existuje matica X nad tým istým poľom taká, že $AX = B$. Zistite, či je X maticami A, B jednoznačne určená. Ak taká matica existuje, tak aspoň jednu takú maticu nájdite.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

5.8. Ukážte, že ak A, B, C sú štvorcové matice také, že $ABC = I$, tak matica B je regulárna a platí $B^{-1} = CA$.

5.9*. Ukážte, že ak A je horná trojuholníková matica rozmerov $n \times n$, ktorá je regulárna, tak aj A^{-1} je horná trojuholníková. (Pod pojmom horná trojuholníková matica sa rozumie to, že pod diagonálou sú nuly. T.j. $a_{ij} = 0$ pre $i < j$.)

6 Opäť sústavy

6.1. Ukážte, že každý podpriestor R^n je množina riešení nejakej sústavy lineárnych rovníc nad poľom R. (LAG1 - 5.2.8(1))

6.2. Nájdite nejakú homogénnu sústavu rovníc so 4 neznámymi nad $\mathbb{R}$, ktorej riešením je daný podpriestor:

a) $S = [(1,4,0,1),(1,0,3,-3),(0,2,0,1)]$
b) $S = [(1,-1,1,-2),(1,1,0,-1),(3,1,1,-4)]$

6.3. Pre dané podpriestory S, T priestoru V nájdite bázu a dimenziu $S \cap T$. Viete zistiť aj čomu sa rovná dimenzia $S + T$?
a) $S = [(2,0,3,1),(1,-1,0,0)]$, $T = [(1,-1,-1,0),(0,2,4,1)]$ vo $V = \mathbb{R}^4$
b) $S = [(1,0,1,-2),(1,1,-1,3)]$, $T = [(1,2,0,1),(2,3,1,1),(2,-1,-1,1)]$ vo $V = \mathbb{R}^4$
c) $S = [(1,1,1,1,0),(2,1,0,3,-2),(1,0,1,0,0)]$ a $T = [(1,1,0,0,3),(1,0,1,1,1),(0,1,1,-1,0)]$ vo $V = \mathbb{R}^5$
Výsledky: a) $\dim(S) = \dim(T) = 2$, $\dim(S \cap T) = 1$, $\dim(S + T) = 3$; b) $\dim(S) = 2$, $\dim(T) = 3$, $\dim(S \cap T) = 1$, $\dim(S + T) = 4$; c) $\dim(S) = 3$, $\dim(T) = 3$, $\dim(S \cap T) = 1$, $\dim(S + T) = 5$