1 Binárne operácie

Úloha 1.1. Vypíšte všetky možné binárne operácie na množine $\{0, 1\}$. Ktoré z nich sú asociatívne, komutatívne, majú neutrálny prvok? Pre ktoré existuje ku každému prvku aj inverzný?

Úloha 1.2. Dokážte, že ak $\circ$ je binárna operácia na množine A a $\circ$ je asociatívna, tak ľubovoľné uzátvorkovanie výrazu $a \circ b \circ c \circ d$ predstavuje ten istý prvok.[1]

Úloha 1.3. Na $\mathbb{R}$ definujme binárnu operáciu $*$ predpisom $x * y = x \cdot y^2$ (kde $\cdot$ je násobenie reálnych čísel). Má táto operácia neutrálny prvok? Ak má, nájdite ho. Je operácia $*$ asociatívna? Je komutatívna?

Úloha 1.4. Pre dve reálne čísla a, b definujme

$$a * b = \frac{a+b}{2},$$

t.j. výsledkom je ich priemer. Je to binárna operácia na $\mathbb{R}$? Je táto operácia komutatívna? Je asociatívna? Má neutrálny prvok?

Úloha 1.5*. Ak viete, že ide o tabuľku asociatívnej binárnej operácie, doplňte chýbajúce výsledky (ak sa to dá).

	a	b	c
a	b	a	c
b			
c			

2 Grupy

$(G, *)$ je grupa, ak $*$ je binárna operácia na G a ďalej platí: Binárna operácia $*$ je asociatívna (A). V G existuje neutrálny prvok pre túto operáciu (N). Pre každý prvok z G existuje inverzný prvok (I).

$$(\forall a, b, c \in G) a * (b * c) = (a * b) * c \tag{A}$$
$$(\exists e \in G)(\forall a \in G) a * e = e * a = e \tag{N}$$
$$(\forall a \in G)(\exists b \in G) a * b = b * a = e \tag{I}$$

O komutatívnej grupe (abelovskej grupe) hovoríme, ak operácia $*$ je navyše komutatívna.

$$(\forall a, b \in G) a * b = b * a \tag{K}$$

Úloha 2.1. Ktoré z uvedených množín tvoria vzhľadom na dané operácie grupu? V ktorých prípadoch je táto grupa komutatívna?
a) $(\mathbb{Z}, \cdot)$ (celé čísla s obvyklým násobením)
b) $(\mathbb{R}, \cdot)$ (reálne čísla s obvyklým násobením)
c) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, d) $(\mathbb{C}, +)$, e) $(\mathbb{C}, \cdot)$, f) $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$
g) $(\mathbb{R}^2, +)$ (so sčitovaním definovaným po zložkách)
h) $\mathbb{R}$ s operáciou $*$, $a * b = a + b - 1$
i) $\mathbb{R}$ s operáciou $*$, $a * b = ab + a + b$

[1] Máme tu na mysli uzátvorkovania *bez výmeny poradia,* ktoré už jednoznačne určujú výsledok operácie. Aspoň bez dôkazu spomeniem, že to isté platí aj pre ľubovoľný počet prvkov. Počet uzátvorkovaní výrazu s n prvkami je n-té *Catalanove číslo.*

j) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ s operáciou $*$, $a * b = ab + a + b$
k) Množina všetkých párnych celých čísel vzhľadom na sčitovanie.
l) Množina všetkých nepárnych celých čísel vzhľadom na sčitovanie.
m) $(\mathbb{Z}_5, \oplus)$
(Pozri aj úlohu 2.2 – táto úloha sú v postate inak sformulované časti i) a j).)

Úloha 2.2. Je $(\mathbb{R}, *)$, kde $a * b = ab + a + b$, grupa? Ak nie, vedeli by ste vynechať niektorý prvok a z množiny $\mathbb{R}$ tak, aby $(\mathbb{R} \setminus \{a\}, *)$ bola grupa?

V úlohách 2.3, 2.4 a 2.15 vidíme príklady grúp, ktoré nie sú komutatívne.

Úloha 2.3. Tvoria všetky permutácie na konečnej množine M s operáciou skladania zobrazení grupu? Je táto grupa komutatívna? Urobte tabuľku grupovej operácie v prípade $M = \{1, 2, 3\}$.

Tabuľka grupy $(S_3, \circ)$:

	id	$\binom{1\,2\,3}{2\,1\,3}$	$\binom{1\,2\,3}{3\,2\,1}$	$\binom{1\,2\,3}{1\,3\,2}$	$\binom{1\,2\,3}{2\,3\,1}$	$\binom{1\,2\,3}{3\,1\,2}$
id	id	$\binom{1\,2\,3}{2\,1\,3}$	$\binom{1\,2\,3}{3\,2\,1}$	$\binom{1\,2\,3}{1\,3\,2}$	$\binom{1\,2\,3}{2\,3\,1}$	$\binom{1\,2\,3}{3\,1\,2}$
$\binom{1\,2\,3}{2\,1\,3}$	$\binom{1\,2\,3}{2\,1\,3}$	id	$\binom{1\,2\,3}{3\,1\,2}$	$\binom{1\,2\,3}{2\,3\,1}$	$\binom{1\,2\,3}{1\,3\,2}$	$\binom{1\,2\,3}{3\,2\,1}$
$\binom{1\,2\,3}{3\,2\,1}$	$\binom{1\,2\,3}{3\,2\,1}$	$\binom{1\,2\,3}{2\,3\,1}$	id	$\binom{1\,2\,3}{3\,1\,2}$	$\binom{1\,2\,3}{2\,1\,3}$	$\binom{1\,2\,3}{1\,3\,2}$
$\binom{1\,2\,3}{1\,3\,2}$	$\binom{1\,2\,3}{1\,3\,2}$	$\binom{1\,2\,3}{3\,1\,2}$	$\binom{1\,2\,3}{2\,3\,1}$	id	$\binom{1\,2\,3}{3\,2\,1}$	$\binom{1\,2\,3}{2\,1\,3}$
$\binom{1\,2\,3}{2\,3\,1}$	$\binom{1\,2\,3}{2\,3\,1}$	$\binom{1\,2\,3}{3\,2\,1}$	$\binom{1\,2\,3}{1\,3\,2}$	$\binom{1\,2\,3}{2\,1\,3}$	$\binom{1\,2\,3}{3\,1\,2}$	id
$\binom{1\,2\,3}{3\,1\,2}$	$\binom{1\,2\,3}{3\,1\,2}$	$\binom{1\,2\,3}{1\,3\,2}$	$\binom{1\,2\,3}{2\,1\,3}$	$\binom{1\,2\,3}{3\,2\,1}$	id	$\binom{1\,2\,3}{2\,3\,1}$

Úloha 2.4. Nech G je množina všetkých funkcií $f_{a,b} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ktoré sú tvaru $f_{a,b}(x) = ax + b$ pre nejaké reálne čísla $a, b \in \mathbb{R}$. Tvorí táto množina funkcií s operáciou skladania zobrazení grupu? Je množina $\{f_{a,b}; a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ s operáciou skladania zobrazení grupa? Dostaneme grupu, ak vezmeme len také $a, b \in \mathbb{R}$, že $a = 1$? V tých prípadoch, keď dostaneme grupu, je táto grupa komutatívna?

Úloha 2.5. Ak $(G, \circ)$ je grupa a $a \in G$ je nejaký jej prvok, tak zobrazenie $f_a \colon G \to G$ definované ako $f_a(x) = a \circ x$ je bijekcia.

Úloha 2.6. Nech $(G, \circ)$ je grupa. Dokážte, že zobrazenie $f \colon G \to G$ definované ako $f(x) = x^{-1}$ je bijekcia.

Úloha 2.7*. Nech G je neprázdna množina a $\circ$ je asociatívna binárna operácia na G. Potom G je grupa práve vtedy, keď pre ľubovoľné $a, b \in G$ majú rovnice

$$a \circ x = b$$
$$y \circ a = b$$

riešenie v G (inými slovami, pre ľubovoľné $a, b \in G$ existujú $x, y \in G$, ktoré spĺňajú tieto dve rovnosti.)

Úloha 2.8*. Nech G je konečná množina a $\circ$ je binárna operácia na G taká, že platí asociatívny zákon a zákony o krátení. Dokážte, že G je grupa.

Úloha 2.9*. Dokážte, že v konečnej grupe, ktorá má párny počet prvkov, existuje prvok rôzny od neutrálneho prvku taký, že $a \circ a = e$.

Úloha 2.10. Nech konečná množina $G = \{e, a_1, \ldots, a_n\}$ tvorí s operáciou $*$ komutatívnu grupu a e je jej neutrálny prvok. Dokážte, že $(a_1 * a_2 * \cdots * a_n)^2 = e$.

Úloha 2.11. Nech $*$ je binárna operácia na množine A, taká, že pre každé $a, b, c \in A$ platí $a * (b * c) = (a * c) * b$ a $*$ má neutrálny prvok. Dokážte, že operácia $*$ je komutatívna a asociatívna.

Úloha 2.12. Nech $(G, \circ)$ je grupa. Dokážte, že ak $x \circ x = x$, tak $x = e$.

Úloha 2.13. Overte, že $G \times H$ spolu s operáciou $*$ definovanou ako

$$(a, b) * (a', b') = (a *_G a', b *_H b')$$

tvorí grupu pre ľubovoľné grupy $(G, *_G)$ a $(H, *_H)$.

Úloha 2.14. Zistite, či $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \Box)$, kde pre každé $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ definujeme $(a, b)\Box(c, d) = (2ac, b + d)$, je grupa. (Môžete sa zamyslieť aj nad tým, či vám riešenie tejto úlohy nezjednoduší, ak už poznáte výsledok z úlohy 2.13.)

Úloha 2.15. Nech $G = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Definujme na tejto množine binárnu operáciu $*$ predpisom $(a, b) * (c, d) = (a + bc, bd)$. Je to skutočne binárna operácia? Je $(G, *)$ grupa? Je to komutatívna grupa?

V súvislosti s úlohami 2.4 a 2.15 sa môžete zamyslieť aj nad tým, či tieto dve grupy nejako navzájom súvisia.

Úloha 2.16. Doplňte nasledujúcu tabuľku

	a	b	c	d
a				
b				d
c			d	
d				

tak aby ste dostali grupu.

Úloha 2.17. Ak pre každý prvok x grupy $(G, \circ)$ platí $x \circ x = e$, tak táto grupa je komutatívna.

Úloha 2.18. Je množina $\mathbb{Q}$ s operáciou $\triangleleft$ definovanou ako $a \triangleleft b = ab - a$ grupa? Je táto operácia komutatívna? Má ľavý neutrálny prvok? Má pravý neutrálny prvok?

Úloha 2.19. Nech $*$ je asociatívna binárna operácia na množine M, ktorá má neutrálny prvok e. Ak pre nejaké $x \in M$ platí $x * x = x$ a ku x existuje ľavý inverzný prvok, tak $x = e$.

Úloha 2.20*. Nech $*$ je binárna operácia na množine G, ktorá
a) je asociatívna,
b) má ľavý neutrálny prvok t.j. existuje prvok $e \in G$ taký, že $(\forall x \in G) e * x = x$
c) pre každý prvok $x \in G$ existuje $y \in G$ také, že $y * x = e$ (kde e označuje prvok z časti b) t.j.

$$(\forall x \in G)(\exists y \in G) y * x = e$$

(stručne môžeme povedať, že ku každému prvku existuje ľavý inverzný prvok vzhľadom na e).
Dokážte, že potom $(G, *)$ je grupa.

Úloha 2.21. Nech G je konečná grupa, $|G| = n$. Neutrálny prvok tejto grupy označme e a jej prvky označme ako $a_1, \ldots, a_n$ (t.j. $G = \{a_1, \ldots, a_n\}$).
a) Ukážte, že pre ľubovoľné $a \in G$ platí $G = \{aa_1, \ldots, aa_n\}$.
b) Predpokladajme, že G je navyše aj komutatívna grupa. Ukážte, že pre ľubovoľné $a \in G$ platí $a^n = e$.
(Poznámka: Takéto tvrdenie platí aj pre nekomutatívnej grupy – v tom prípade ale treba použiť iný argument. Dá sa to odvodiť napríklad ako dôsledok Lagrangeovej vety.)

Do istej miery podobnými úvahami ako v predošlej úlohe sa dá prísť aj na takéto tvrdenie:

Úloha 2.22. Nech G je konečná n-prvková množina, jej prvky označme ako $a_1, \dots, a_n$ (t.j. $G = \{a_1, \dots, a_n\}$). Nech ďalej $*$ je binárna operácia na G, ktorá má neutrálny prvok e, je asociatívna, komutatívna a platia pre ňu zákony o krátení.
a) Ukážte, že pre ľubovoľné $a \in G$ platí $G = \{aa_1, \dots, aa_n\}$.
b) Ukážte, že pre ľubovoľné $a \in G$ platí $a^n = e$.
(Poznámka: Z rovnosti $a^n = e$ vieme vyčítať to, že ku e existuje inverzný prvok.)