1 Vektorové priestory

Definícia 1.1. Nech F je pole a $V \neq \emptyset$ je množina. Nech $+$ je binárna operácia na V a každej dvojici $c \in F$, $\vec{\alpha} \in V$ je priradený prvok $c \cdot \vec{\alpha} \in V$, pričom platí pre ľubovoľné $c, d \in F$ a $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$:

(i) $(V, +)$ je komutatívna grupa,

(ii) $c \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = c \cdot \vec{\alpha} + c \cdot \vec{\beta}$,

(iii) $(c + d) \cdot \vec{\alpha} = c \cdot \vec{\alpha} + d \cdot \vec{\alpha}$,

(iv) $(c \cdot d) \cdot \vec{\alpha} = c \cdot (d \cdot \vec{\alpha})$,

(v) $1 \cdot \vec{\alpha} = \vec{\alpha}$.

Potom hovoríme, že V je *vektorový priestor* nad poľom F.

Označenie: $\vec{0}$ = nulový vektor, $-\vec{x}$ = opačný vektor

Príklady vektorových priestorov, ktoré poznáme z prednášky: F^n (usporiadané n-ties) aj F^M (zobrazenia z M do F) sú vektorové priestory nad poľom F.

Úloha 1.2. Koľko prvkov má vektorový priestor $(\mathbb{Z}_3)^n$? Čomu sa v tomto priestore rovná $\vec{\alpha} + \vec{\alpha} + \vec{\alpha}$?

Úloha 1.3. Nech V je množina všetkých postupností reálnych čísel. Pre postupnosti $a = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $b = (b_n)_{n=1}^{\infty}$ definujeme $a + b = (a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$ a $c \cdot a = (c \cdot a_n)_{n=1}^{\infty}$. Overte, že V s týmito operáciami tvorí vektorový priestor nad poľom $\mathbb{R}$.

Úloha 1.4. Overte, že všetky zobrazenia $f\colon \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}$ so sčitovaním a násobením skalárom definovaným po bodoch tvoria vektorový priestor nad poľom $\mathbb{R}$.

Úloha 1.5. Overte, že $\mathbb{R}$ je vektorový priestor nad $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ je vektorový priestor nad $\mathbb{Q}$. Je $\mathbb{C}$ vektorový priestor nad $\mathbb{Z}$?

Úloha 1.6. Zistite, či $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ s operáciami $+$ a $\cdot$ definovanými tak, že $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ pre ľubovoľné $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a $r \cdot (a, b) = (ra, 2rb)$ pre ľubovoľné $r \in \mathbb{R}$, je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$.

Úloha 1.7. Zistite, či $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$, ak definujeme $x \oplus y = xy$, $c \odot x = x^c$ pre $x, y \in \mathbb{R}^+$, $c \in \mathbb{R}$.

2 Podpriestory

Ak V je vektorový priestor nad poľom F, $S \neq \emptyset$ a $S \subseteq V$, tak S je *vektorovým podpriestorom* priestoru V, ak

(i) pre ľubovoľné $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in S$ platí $\vec{\alpha} + \vec{\beta} \in S$,

(ii) pre ľubovoľné $\vec{\alpha} \in S$ a $c \in F$ platí $c\vec{\alpha} \in S$.

Kritérium vektorového podpriestoru: Namiesto uvedených dvoch podmienok stačí overiť, že pre ľubovoľné $c, d \in F$ a $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$ platí

$$\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in S \qquad \Rightarrow \qquad c\vec{\alpha} + d\vec{\beta} \in S. \tag{1}$$

(A ďalšia ekvivalentná charakterizácia podpriestorov je uvedená v úlohe 2.6.)

Podpriestor vektorového priestoru tiež tvorí vektorový priestor.

Každý podpriestor obsahuje nulový vektor.

Úloha 2.1. Ktoré z týchto množín tvoria vektorový podpriestor priestoru $\mathbb{R}^3$?
a) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 \in \mathbb{Z}\}$
b) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 = 0\}$
c) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 = 0 \vee x_2 = 0\}$
d) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; 3x_1 + 4x_2 = 1\}$
e) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; 7x_1 - x_2 = 0\}$
f) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 = x_3\}$
g) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; |x_1| = |x_2|\}$
h) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 + x_3 \geq 0\}$
i) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; 2x_1 = -x_2 = x_3\}$
j) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$
k) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$

Úloha 2.2. Ktoré z týchto podmnožín tvoria vektorový podpriestor priestoru reálnych funkcií $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?
a) funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s vlastnosťou $2f(0) = f(1)$
b) nezáporné funkcie
c) funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s vlastnosťou $f(1) = 1 + f(0)$
d) funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s vlastnosťou $(\forall x \in \langle 0, 1\rangle) f(x) = f(1 - x)$
e) ohraničené funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
f) spojité funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
h) funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že existuje konečná $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$
i*) funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že existuje konečná alebo nekonečná $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Úloha 2.3. Overte, či
a) množina všetkých polynómov s reálnymi koeficientami,
b) množina všetkých polynómov s reálnymi koeficientami stupňa najviac n,
c) množina všetkých polynómov párneho stupňa,
d) množina všetkých polynómov stupňa práve n
sú vektorové priestory. Sčitovanie a násobenie skalárom definujeme rovnako ako pre reálne funkcie.

Úloha 2.4. Dokážte, že množina všetkých funkcií $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ktoré sú tvaru $a+b\cos x+c\sin x$ pre nejaké $a, b, c \in \mathbb{R}$ tvoria vektorový podpriestor priestoru všetkých reálnych funkcií $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Úloha 2.5. Nech S, T sú podpriestory vektorového priestoru V nad poľom F. Ukážte, že $S \cup T$ je podpriestor priestoru V práve vtedy, keď $S \subseteq T$ alebo $T \subseteq S$.

Úloha 2.6. Nech V je vektorový priestor nad poľom F a $S \neq \emptyset$ je podmnožina V. Ukážte, že S je podpriestor V práve vtedy, keď pre ľubovoľné $c \in F$ a $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in S$ platí $c\vec{\alpha} + \vec{\beta} \in S$.