1 Lineárne kombinácie, lineárny obal

$$[\vec\alpha_1,\vec\alpha_2,\dots,\vec\alpha_n]=\{c_1\vec\alpha_1+c_2\vec\alpha_2+\dots+c_n\vec\alpha_n; c_i\in F \text{ pre } i=1,2\dots,n\}$$

Je užitočné si uvedomiť, že:

- Lineárny obal $[\vec\alpha_1,\vec\alpha_2,\dots,\vec\alpha_n]$ je najmenší podpriestor daného vektorového priestoru, ktorý obsahuje vektory $\vec\alpha_1,\vec\alpha_2,\dots,\vec\alpha_n$.
- Teda ak S je podpriestor taký, že $\vec\alpha_1,\vec\alpha_2,\dots,\vec\alpha_n\in S$, tak $[\vec\alpha_1,\vec\alpha_2,\dots,\vec\alpha_n]\subseteq S$. (Toto je vlastne trochu inak sformulovaný fakt, že podpriestory sú uzavreté vzhľadom na lineárne kombinácie.)

Úloha 1.1. Nech $\vec\alpha,\vec\beta,\vec\gamma$ sú ľubovoľné vektory z vektorového priestoru V nad poľom $\mathbb{R}$. Potom $[\vec\alpha,\vec\beta,\vec\gamma]=[\vec\alpha+\vec\beta,\vec\alpha-\vec\beta,\vec\gamma]$.

Úloha 1.2. Nech $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; 2x+3y+5z=0\}$. Ukážte, že M je vektorový podpriestor $\mathbb{R}^3$ a nájdite vektory, ktoré ho generujú.

2 Lineárna nezávislosť

Lineárne závislé vektory: Existujú $c_1,c_2,\dots,c_n\in F$, ktoré nie sú všetky nulové a platí pre ne:

$$c_1\vec\alpha_1+c_2\vec\alpha_2+\dots+c_n\vec\alpha_n=\vec0.$$

Lineárne nezávislé vektory:

$$c_1\vec\alpha_1+c_2\vec\alpha_2+\dots+c_n\vec\alpha_n=\vec0 \qquad\Rightarrow\qquad c_1=c_2=\ldots=c_n=0$$

Nie je zlé si uvedomiť, ako to je s lineárnou závislosťou a nezávislosťou, ak máme jeden vektor resp. dva vektory.

Úloha 2.1. Množina $\{\vec\alpha\}$ je lineárne nezávislá práve vtedy, keď $\vec\alpha\neq\vec0$. Dva vektory $\vec\alpha,\vec\beta$ sú lineárne závislé práve vtedy, keď jeden z nich je násobkom druhého (t.j. existuje $c\in F$ tak, že $c.\vec\alpha=\vec\beta$), alebo jeden z nich je $\vec0$.

Ak vektory $\vec\alpha,\vec\beta$ sú lineárne nezávislé, tak $\vec\alpha,\vec\beta,\vec\gamma$ sú lineárne závislé práve vtedy, keď $\vec\gamma$ je lineárna kombinácia vektorov $\vec\alpha,\vec\beta$.

Úloha 2.2. Zistite, či dané vektory sú lineárne závislé v príslušnom vektorovom priestore:
a) (1,2,3), (1,3,2), (2,1,5) v $\mathbb{R}^3$,
b) (1,2,3), (1,3,2), (2,1,5), (1,127,3) v $\mathbb{R}^3$,
c) (1,3,4), (2,1,3), (3,1,4) v $\mathbb{Z}_5^3$
d) (1,3,4), (2,1,3), (3,1,4) v $\mathbb{Z}_7^3$.

V niektorých častiach nasledujúcej úlohye budeme využívať fakt, že polynóm sa rovná nule práve vtedy, keď všetky koeficienty sú nulové.[1] (Ale mali by sme ju vedieť vyriešiť aj bez neho.)

Úloha 2.3. Zistite, či sú nasledujúce funkcie lineárne závislé vo vektorovom priestore všetkých funkcií z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$:
a) $x+1$, x^2, x^3,
b) 1, $x+a$, x^2+bx+c (a,b,c môžu byť ľubovoľné reálne čísla),
c*) 1, $\cos x$, $\cos^2(\frac{x}{2})$,
d) x, $x(x-1)$, $x(x-1)(x-2)$,
e) 1, $\cos x$, $\cos 2x$.

[1] `https://msleziak.com/forum/viewtopic.php?t=1349`

Úloha 2.4. Ak $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ sú lineárne nezávislé vo vektorovom priestore V nad poľom $\mathbb{R}$, tak aj $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, $\vec{\alpha}+\vec{\gamma}$, $\vec{\beta}+\vec{\gamma}$ sú lineárne nezávislé. (Platilo by to aj vo vektorovom priestore nad poľom $\mathbb{Z}_2$?)

Úloha 2.5*. Overte, že $\mathbb{R}$ je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{Q}$. Dokážte, že v tomto priestore sú 1, $\sqrt{2}$ a $\sqrt{3}$ lineárne nezávislé.

Úloha 2.6. Ukážte, že vo vektorovom priestore $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$ (z predošlej úlohy) sú lineárne nezávislé vektory $1+3\sqrt{2}$ a $2-\sqrt{2}$.

Úloha 2.7*. Sú 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ lineárne nezávislé vo vektorovom priestore $\mathbb{R}$ nad poľom $\mathbb{Q}$? (Hint: Úlohu môže o niečo zjednodušiť, ak sa pozriete na 1 a $\sqrt{3}$ ako prvky priestoru $\mathbb{R}$ nad poľom $\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{3}; a,b\in\mathbb{Q}\}$.)

Úloha 2.8. Nech $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ sú ľubovoľné vektory. Zistite, či sú tieto systémy vektorov lineárne závislé:
a) $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\alpha}+\vec{\beta},\vec{\gamma}$, b) $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{0}$, c) $\vec{\alpha},\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$, d) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma},\vec{\alpha}+\vec{\beta},\vec{\alpha}+\vec{\gamma},\vec{\beta}+\vec{\gamma}$.

Úloha 2.9. Nech vektory $\vec{\alpha}_1,\dots,\vec{\alpha}_n$ sú lineárne nezávislé vektory v nejakom vektorovom priestore nad poľom $\mathbb{R}$. Sú aj vektory $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_1+2\vec{\alpha}_2,\dots,\vec{\alpha}_1+2\vec{\alpha}_2+\dots+n\vec{\alpha}_n$ lineárne nezávislé?