Báza a dimenzia

Vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ tvoria bázu vektorového priestoru V, ak sú *lineárne nezávislé* a *generujú celý priestor*. Ekvivalentná podmienka: Každý vektor $\vec{\beta} \in V$ sa dá *jednoznačne* vyjadriť ako

$$\vec{\beta} = c_1\vec{\alpha}_1 + \dots + c_n\vec{\alpha}_n.$$

(T.j. máme jednoznačnosť vyjadrenia ľubovoľného vektora v tvare lineárnej kombinácie bázových vektorov.)

Ľubovoľné dve bázy vektorového priestoru majú rovnaký počet prvkov. Počet prvkov bázy priestoru V nazývame *dimenzia priestoru* V. Označujeme $\dim(V)$ alebo $d(V)$.

Ak $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n \in V$ a $\dim(V) = n$, tak tieto podmienky sú ekvivalentné:

- $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ je báza priestoru V.
- Vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ sú lineárne nezávislé.
- Platí $[\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n] = V$, t.j. tieto vektory generujú celý priestor.

Inak povedané: Ak už viem, že mám „správny počet vektorov“ – toľko, koľko je dimenzia celého priestoru – tak vlastne stačí overiť jednu z dvoch podmienok, ktoré sa vyskytujú v definícii bázy. Tá druhá je potom splnená „zadarmo“.

Úloha 1. Zistite, či dané vektory tvoria bázu v $\mathbb{R}^3$:
a) $(1,2,3)$, $(1,-2,3)$, $(1,2,-3)$
b) $(1,1,1)$, $(1,1,0)$, $(1,0,1)$
c) $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,1,1)$

Úloha 2. Zistite, či dané vektory tvoria bázu v $\mathbb{Z}_5^3$:
a) $(1,2,3)$, $(2,3,4)$, $(0,3,1)$
b) $(1,0,0)$, $(0,1,2)$, $(2,1,3)$
c) $(0,1,2)$, $(3,0,1)$, $(1,0,2)$.

Úloha 3. Nájdite dimenziu zadaných podpriestorov priestoru $\mathbb{R}^4$. Nájdite pre každý z nich aspoň jednu bázu.
a) $S_1 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4; x_1+x_2+x_3+x_4 = 0\}$
b) $S_2 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4; x_1+x_2+x_3+x_4 = 0, x_1+x_2-x_3+2x_4 = 0\}$
c) $S_3 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4; x_1+x_2+x_3+x_4 = 0, x_1+x_2-x_3+2x_4 = 0, x_1+2x_3-x_4 = 0\}$

Úloha 4. Určte dimenziu podpriestoru $[\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}]$, ak $\vec{\alpha} = (1,3,2,1)$, $\vec{\beta} = (4,9,5,4)$ a $\vec{\gamma} = (3,7,4,3)$ v $\mathbb{R}^4$.

Úloha 5. Ako P_n označme priestor všetkých polynómov stupňa najviac n. Overte, že $d(P_n) = n+1$ a že $1, x-1, \dots (x-1)^n$ je báza tohoto priestoru.

Úloha 6. Ak sa to dá, doplňte dané vektory na bázu príslušného vektorového priestoru:
a) (1,1,2), (2,1,3) v $\mathbb{R}^3$,
b) x^2-1, x^2+1 v priestore polynómov stupňa najviac 3,
c) (1,2,3,0), (3,4,1,2) v $\mathbb{Z}_5^4$.

Úloha 7. Máme dané vektory $\vec{\alpha}_1 = (1,1,2,0)$, $\vec{\alpha}_2 = (0,0,3,1)$ v priestore $\mathbb{Z}_5^4$. Koľko existuje možností na výber vektorov $\vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_4 \in \mathbb{Z}_5^4$ tak, aby tieto štyri vektory tvorili bázu?

Úloha 8. Ak každý z vektorov $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_k$ je lineárnou kombináciou vektorov $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_m$, tak $d([\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_k]) \leq d([\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_m])$.

Úloha 9. Overte, že množina $S = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (\exists a, b \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) = ax+b\}$ je podpriestor priestoru všetkých funkcií z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Nájdite funkcie $g, h \in S$ také, že $S = [g,h]$.

Úloha 10. Zistite, či $S = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbb{R}\}$ je vektorový podpriestor priestoru reálnych funkcií. Ak áno, nájdite, $g_1, g_2, g_3 \in S$ také, že $S = [g_1, g_2, g_3]$.

Úloha 11*. a) Nech $p_1, \dots, p_k$ sú navzájom rôzne prvočísla. Ukážte, že čísla $\ln p_1, \ln p_2, \dots, \ln p_k$ sú lineárne nezávislé ako prvky vektorového priestoru $\mathbb{R}$ nad poľom $\mathbb{Q}$.
b) Ukážte, že vektorový priestor $\mathbb{R}$ nad poľom $\mathbb{Q}$ je nekonečnorozmerný.[1]

[1] Keď budeme vedieť nejaké veci o lineárnych izomorfizmoch a tiež o spočítateľných a nespočítateľných množinách, tak by sme mali byť schopní nájsť jednoduchšie zdôvodnenie, že ide o nekonečnorozmerný priestor. Dá sa to však zdôvodniť aj takýmto spôsobom – budeme tu potrebovať využiť nejaké veci o prvočíslach.