Riadková ekvivalencia, úprava na redukovaný tvar

Matice A a B sú riadkovo ekvivalentné práve vety, keď

- A aj B sú riadkovo ekvivalentné s tou istou redukovanou trojuholníkovou maticou;
- $V_A = V_B$ (t.j. ich riadky generujú rovnaký podpriestor).

Väčšina úloh, ktoré sú tu, sa dá riešiť použitím elementárnych riadkových operácií alebo úpravou na redukovaný tvar. (Samozrejme, nie je to jediná možnosť ako ich riešiť.)

V nasledujúcich úlohách, ak nie je uvedené inak, uvažujeme matice nad poľom $\mathbb{R}$.

Úloha 1. Nájdite redukované trojuholníkové matice riadkovo ekvivalentné s nasledujúcimi maticami a) nad poľom $\mathbb{R}$ b) nad poľom $\mathbb{Z}_5$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Úloha 2. Ak sa to dá, doplňte dané vektory na bázu vektorového priestoru $(\mathbb{Z}_5)^4$:

a) $(1, 2, 0, 0)$, $(3, 4, 0, 1)$
b) $(1, 2, 3, 4)$, $(1, 1, 1, 1)$, $(3, 2, 1, 0)$
c) $(2, 3, 4, 1)$, $(3, 2, 4, 1)$, $(0, 2, 3, 2)$
d) $(1, 3, 1, 4)$, $(3, 0, 4, 3)$, $(2, 3, 1, 1)$

Úloha 3. Ak sa to dá, doplňte dané vektory na bázu priestoru $S = [(1, 0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0, 2), (0, 0, 1, 0, 1), (0, 0, 0, 1, 3)] \subseteq (\mathbb{Z}_5)^5$.

a) $\vec{\alpha}_1 = (1, 2, 1, 1, 4)$, $\vec{\alpha}_2 = (2, 4, 2, 1, 0)$
b) $\vec{\alpha}_1 = (1, 1, 2, 4, 2)$, $\vec{\alpha}_2 = (3, 3, 2, 2, 0)$
c) $\vec{\alpha}_1 = (1, 3, 2, 0, 4)$, $\vec{\alpha}_2 = (2, 1, 4, 0, 3)$
d) $\vec{\alpha}_1 = (1, 2, 3, 3, 1)$, $\vec{\alpha}_2 = (2, 3, 0, 0, 3)$

Úloha 4. Zistite, či nasledujúce matice tvoria bázu vektorového priestoru všetkých matíc typu 2×2 nad poľom $\mathbb{R}$:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

Úloha 5. Zistite, ktoré z daných vektorov patria do podpriestoru $[(1, 4, 1, 0), (2, 3, -2, -3), (0, 2, -5, -6)]$ priestoru $\mathbb{R}^4$: a) $(4, 11, -3, -3)$, b) $(1, 0, 11, 12)$, c) $(3, 0, 4, 1)$, d) $(1, -1, 2, -2)$.

Úloha 6. Zistite, či $[\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2] \subseteq [\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2, \vec{\gamma}_3]$ vo vektorovom priestore $\mathbb{R}^4$ nad poľom $\mathbb{R}$, ak $\vec{\gamma}_1 = (1, 1, 5, 1)$, $\vec{\gamma}_2 = (1, 0, 2, 1)$, $\vec{\gamma}_3 = (2, 1, 0, 1)$, $\vec{\beta}_1 = (1, 1, 5, 1)$ a $\vec{\beta}_2 = (-1, 1, -6, -2)$.

Úloha 7. Zistite hodnosti matíc

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Úloha 8. Upravte danú maticu nad poľom $\mathbb{R}$ na redukovaný trojuholníkový tvar a určte hodnosť matice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & -4 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & 1 & 10 & 0 & 0 \\ 5 & 15 & 2 & 25 & -1 & -4 \\ 3 & 9 & 1 & 15 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

Úloha 9. Určte hodnosť danej matice v závislosti od parametra $c \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & c & -1 & 2 \\ 2 & -1 & c & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & c & 2c \\ 1 & -1 & 3 & -c \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & c+1 & 0 \\ 2 & c-1 & 2c \\ c & c & c \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & c+1 & 0 \\ 4 & c-1 & 2c \\ c & c & c \end{pmatrix}$$

Úloha 10. Zistite, či priestor [(2,4,4,2,4),(3,1,1,2,2),(4,3,3,2,0)] je podpriestor priestoru [(1,1,0,1,4),(2,1,3,3,1),(3,2,1,1,3)] a) nad $\mathbb{Q}$, b) nad $\mathbb{Z}_5$, c) nad $\mathbb{Z}_7$.

Úloha 11. Zistite, ktoré z daných matíc sú navzájom riadkovo ekvivalentné:
$\begin{pmatrix} 2&3&1\\ 4&3&3\\ 1&2&4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&3&1\\ 2&4&3\\ 3&1&2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&3&1\\ 2&0&3\\ 1&1&2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3&0&1\\ 0&3&2\\ 1&0&3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&1\\ 0&1&1\\ 2&1&3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3&2&1\\ 4&2&1\\ 1&0&1 \end{pmatrix}$

Úloha 12. Nájdite bázu daného podpriestoru a určite jeho dimenziu:
a) $[(1,1,0,-1),(0,1,2,1),(1,0,1,-1),(1,1,-6,-3),(-1,-5,1,0)]$ v $\mathbb{R}^4$;
b) $[(1,2,2,0,1),(1,2,0,1,2),(1,2,-2,1,0)]$ v $\mathbb{R}^5$
c) $[(1,2,2,0,1),(1,2,0,1,2),(1,2,3,1,0)]$ v $\mathbb{Z}_5^5$
d) $[(1,2,2,0,1),(1,2,0,1,2),(1,2,3,1,0)]$ v $\mathbb{Z}_7^5$.

Úloha 13. Zistite, pre aké hodnoty parametra c sú dané vektory lineárne závislé
a) $(-1,0,-1)$, $(2,1,2)$, $(1,1,c)$ v $\mathbb{R}^3$;
b) $(1,1,3)$, $(2,1,2)$, $(c,0,-c)$ v $\mathbb{R}^3$;
c) $(2,0,-1)$, $(3,2,0)$, $(1,-2,c)$ v $\mathbb{R}^3$.

Úloha 14*. Určite hodnosť matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & a_{n+1} \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 & a_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n & a_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

ak viete, že $a_1, \dots, a_{n+1}$ sú navzájom rôzne reálne čísla (t.j. $a_i \neq a_j$ pre všetky $i \neq j$).

Pri riešení tejto úlohy môžete použiť fakt, že elementárne stĺpcové operácie nemenia hodnosť, resp. to, že $h(A) = h(A^T)$. (Tento fakt dokážeme neskôr.) Ale mala by sa dať vyriešiť aj bez použitia tejto veci.

Úloha 15. Zistite hodnosť matice

$$A = \begin{pmatrix} b & b & b-a \\ a-b & -b & a \\ a+b & b & 0 \end{pmatrix}$$

v závislosti od hodnôt parametrov $a, b \in \mathbb{R}$. (Opäť, ak sa vám to bude hodiť, môžete použiť fakt, že $h(A) = h(A^T)$.)