1 Lineárne zobrazenia

Zobrazenie $f\colon V \to W$ je lineárne práve vtedy, keď pre ľubovoľné $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$ a ľubovoľné $c \in F$ platí:

$$f(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) = f(\vec{\alpha}) + f(\vec{\beta})$$
$$f(c\vec{\alpha}) = cf(\vec{\alpha})$$

Ekvivalentná podmienka:

$$(\forall c, d \in F)(\forall \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V) f(c\vec{\alpha} + d\vec{\beta}) = cf(\vec{\alpha}) + df(\vec{\beta}).$$

Ďalšia ekvivalentná podmienka je v úlohe 3.3. Súčasne vieme aj to, že lineárne zobrazenie zachováva lineárne kombinácie:

$$f(c_1\vec{\alpha}_1 + \dots + c_n\vec{\alpha}_n) = c_1 f(\vec{\alpha}_1) + \ldots + c_n f(\vec{\alpha}_n).$$

Základná veta o lineárnych zobrazeniach: Lineárne zobrazenie je jednoznačne určené obrazmi bázových vektorov.

Z obrazov bázových vektorov $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ vieme zistiť aj to, či lineárne zobrazenie je:

- injektívne; to je práve vtedy, keď $f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)$ sú lineárne nezávislé.
- sujektívne; $f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)$ generujú W, t.j. $[f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)] = W$.
- bijektívne (t.j. izomorfizmus) práve vtedy, keď $f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)$ je báza priestoru W.

Úloha 1.1. Ukážte, že $f\colon V \to W$ je lineárne práve vtedy, keď pre ľubovoľné $c \in F$ a $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$ platí $f(c\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = cf(\vec{\alpha}) + f(\vec{\beta})$.

Úloha 1.2. Nech V a W sú vektorové priestory nad poľom F a $f\colon V \to W$ je lineárne zobrazenie. Ak $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ sú lineárne závislé vektory, tak aj $f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)$ sú lineárne závislé vektory.

Úloha 1.3. Nech $f\colon V \to W$ je lineárne zobrazenie z vektorového priestoru V do vektorového priestoru W nad poľom F. Dokážte:
Ak S je podpriestor vektorového priestoru V, tak $f[S] = \{f(\vec{\alpha}); \vec{\alpha} \in S\}$ je podpriestor vektorového priestoru W.
Ak T je podpriestor vektorového priestoru W, tak $f^{-1}[T] = \{\vec{\alpha} \in V : f(\vec{\alpha}) \in T\}$ je podpriestor vektorového priestoru V.

2 Súčin matíc

Ak A je typu $m \times \boxed{n}$ a B je typu $\boxed{n} \times k$, tak súčin $C = AB$ má rozmery $m \times k$ a

$$c_{ij} := a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}b_{tj}.$$

Súčin matíc vo všeobecnosti nie je komutatívny. Platia však tieto vlastnosti (za predpokladu, že matice majú také rozmery, aby sa dali násobiť):

$$I_m A = A I_n = A$$
$$A(BC) = (AB)C$$
$$(A+B)C = AC + BC$$
$$C(A+B) = CA + CB$$

(Teda platí asociatívnosť aj distributívnosť. Násobenie jednotkovou maticou nemení maticu.)

Aj takýto pohľad na súčin je užitočný: Riadky matice AB sú lineárne kombinácie riadkov matice B; pričom riadky matice A určujú koeficienty týchto lineárnych kombinácií.

Úloha 2.1. Vypočítajte $A^2 + 2AB + B^2$, $A^2 + 2BA + B^2$, $A^2 + AB + BA + B^2$, $(A + B)^2$, ak $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

Úloha 2.2. Vyrátajte EA a AE pre $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ a a) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vedeli by ste nájsť riadkovú/stĺpcovú operáciu, pomocou ktorej dostaneme z matice A maticu EA resp. AE? (Viac sa o súvise násobenia matíc a elementárnych riadkových/stĺpcových sa dá nájsť v texte.).

Úloha 2.3. Dokážte:
a) $(AB)^T = B^T A^T$
b) Ak A je symetrická matica, tak aj A^n pre každé $n \in \mathbb{N}$ je symetrická matica.

Úloha 2.4. Pre štvorcovú maticu C typu $n \times n$ budeme výraz $\mathrm{Tr}(C) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_{kk} = c_{11} + c_{22} + \dots + c_{nn}$ nazývať *stopa matice* C.

Ukážte, že ak A, B sú matice typu $n \times n$ nad poľom F, tak platia rovnosti $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A^T)$ a $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Zistite, či pre ľubovoľné matice A, B, C typu $n \times n$ platia vzťahy $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(CBA)$ a $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(ACB)$. (Svoje tvrdenie zdôvodnite!) Ak niektorý z týchto vzťahov neplatí, bude platiť za dodatočného predpokladu, matica A je symetrická?

Úloha 2.5. Dokážte, alebo vyvráťte nasledujúce tvrdenie: Ak A, B sú štvorcové matice typu $n \times n$ a $A^2 = B^2$, tak $A = B$ alebo $A = -B$.

Úloha 2.6. Nech $C = AB$, kde A, B sú matice. Musí potom platiť $V_C \subseteq V_A$? Musí platiť $V_C \subseteq V_B$? Musí platiť $V_A \subseteq V_C$, $V_B \subseteq V_C$? (Svoje tvrdenie zdôvodnite, t.j. dokážte, alebo nájdite kontrapríklad.)

Úloha 2.7. Nech A, B sú matice nad poľom F typu $m \times n$ resp. $n \times k$. Dokážte, že $h(AB) \leq h(A)$. Dokážte, že ak $n = k$ a B je regulárna, tak $h(AB) = h(A)$.

Úloha 2.8. Nech A, B sú matice nad poľom F typu $m \times n$ resp. $n \times k$. Dokážte, že $h(AB) \leq h(B)$. Dokážte, že ak $m = n$ a A je regulárna, tak $h(AB) = h(B)$.

Úloha 2.9*. Nech $A, B \in M_{m,n}(F)$. Dokážte: Matice A, B sú riadkovo ekvivalentné práve vtedy, keď existuje regulárna matica $R \in M_{m,m}(F)$ taká, že $B = RA$.

Úloha 2.10*. Nech A je štvorcová matica (nad nejakým poľom F). Dokážte: Matica A je regulárna práve vtedy, keď A sa dá dostať ako súčin nejakých matíc elementárnych riadkových operácií. (T.j. $A = E_1 E_2 \dots E_k$, kde každá z matíc $E_1, E_2, \dots, E_k$ zodpovedá nejakej ERO.)

3 Matica lineárneho zobrazenia

Matica lineárneho zobrazenia $f\colon F^n \to F^k$ je matica typu $n \times k$ nad poľom F, ktorej i-ty riadok je vektor $f(\vec{e}_i)$, t.j. obraz i-teho vektora zo štandardnej bázy.

Súčin matíc a skladanie lineárnych zobrazení – pozor na **poradie**:

$$A_{g \circ f} = A_f \cdot A_g$$

Obraz vektora a súčin:

$$f(\vec{\alpha}) = \vec{\alpha} \cdot A_f$$

Úloha 3.1. Nájdite maticu lineárneho zobrazenia $f\colon \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^2$, ktoré spĺňa uvedené podmienky. (Ak takých matíc existuje viacero, nájdite aspoň jednu. Ak taká matica neexistuje, zdôvodnite to.)
a) $f(1,2,3) = (1,2)$, $f(2,1,3) = (1,1)$, $f(3,1,2) = (4,1)$
b) $f(2,3,3) = (1,2)$, $f(1,1,3) = (3,4)$, $f(0,2,4) = (0,3)$
c) $f(2,3,1) = (1,2)$, $f(4,1,3) = (3,4)$, $f(4,1,4) = (2,4)$
d) $f(1,2,3) = (2,1)$, $f(2,3,1) = (0,1)$, $f(3,4,4) = (3,1)$
e) $f(2,1,3) = (1,1)$, $f(3,3,1) = (0,3)$, $f(4,1,0) = (4,4)$
f) $f(4,1,4) = (0,1)$, $f(2,1,3) = (3,1)$, $f(2,4,2) = (2,1)$
g) $f(3,4,1) = (1,3)$, $f(1,3,1) = (2,0)$, $f(1,2,1) = (3,1)$, $f(3,3,4) = (2,2)$
h) $f(1,4,2) = (0,1)$, $f(3,1,1) = (1,4)$

Úloha 3.2. Nájdite maticu lineárneho zobrazenia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, pre ktoré platí:[1]
a) $f(2,0,3) = (1,2,-1,1)$, $f(4,1,5) = (4,5,-2,1)$, $f(3,1,2) = (1,-1,1,-1)$,
b) $f(2,0,3) = (1,2,-1,1)$, $f(4,1,5) = (4,5,-2,1)$, $f(2,-1,4) = (-1,1,-1,2)$,
c) $f(2,0,3) = (1,2,-1,1)$, $f(4,1,5) = (4,5,-2,1)$, $f(2,-1,4) = (1,-1,1,-1)$.

Úloha 3.3. Ukážte, že $f\colon V \to W$ je lineárne práve vtedy, keď pre ľubovoľné $c \in F$ a $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$ platí $f(c\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = cf(\vec{\alpha}) + f(\vec{\beta})$.

Úloha 3.4. Nájdite maticu lineárneho zobrazenia $f\colon (\mathbb{Z}_7)^2 \to (\mathbb{Z}_7)^2$ a napíšte jeho predpis.
a) $f(1,1) = (0,1)$, $f(6,1) = (3,2)$
b) $f(2,3) = (1,0)$, $f(3,2) = (6,1)$

Úloha 3.5. Nájdite maticu lineárneho zobrazenia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ takého, že:
a) $f(1,2,3,1) = (1,3,1,0)$, $f(2,1,3,0) = (0,1,3,1)$, $f(3,2,1,0) = (1,0,3,0)$, $f(2,2,3,4) = (3,1,0,4)$
b) $f(1,2,3,4) = (0,0,0,0)$, $f(2,1,3,1) = (1,0,3,1)$, $f(0,1,2,0) = (2,0,1,0)$, $f(1,0,3,1) = (2,1,3,1)$
c) $f(0,1,1,1) = (1,0,0,0)$, $f(1,0,1,1) = (0,1,0,0)$, $f(1,1,0,1) = (0,0,1,0)$, $f(1,1,1,0) = (0,0,0,1)$

Úloha 3.6. Koľko existuje lineárnych zobrazení spĺňajúcich zadané podmienky? Koľko z nich je injektívnych? Koľko je surjektívnych?
a) $f\colon \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^4$, $f(1,3,1) = (1,1,1,3)$, $f(2,1,3) = (0,1,3,4)$, $f(2,1,0) = (1,4,0,0)$;
b) $f\colon \mathbb{Z}_5^4 \to \mathbb{Z}_5^3$, $f(1,0,3,1) = (0,1,3)$, $f(2,1,3,1) = (1,1,3)$, $f(1,1,4,1) = (2,2,1)$;
c) $f\colon \mathbb{Z}_5^4 \to \mathbb{Z}_5^3$, $f(1,0,3,1) = (0,1,3)$, $f(2,1,3,1) = (1,1,3)$, $f(1,1,0,0) = (1,0,0)$;

[1] Tento príklad je kompletne vyriešený v texte na webe.