1 Inverzná matica

Úloha 1.1. Dokážte, že ak A, B sú regulárne štvorcové matice rovnakých rozmerov nad tým istým poľom F, tak platí:
a) $(A^{-1})^{-1} = A$,
b) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ c) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Úloha 1.2. Nájdite inverznú maticu k daným maticiam nad $\mathbb{R}$:
$\begin{pmatrix} 2&3&1\\4&3&3\\1&2&1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1&3&1\\2&4&3\\3&1&2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0&3&1\\2&0&3\\1&1&2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3&0&1\\0&3&2\\1&0&1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1&0&1\\0&1&1\\2&-1&3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3&2&1\\4&2&1\\1&0&1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1&\sqrt{2}&\sqrt{6}\\0&1&\sqrt{3}\\0&0&1 \end{pmatrix}$ Výsledky:
$\begin{pmatrix} \frac{3}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{3}{2}\\ \frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\\ -\frac{5}{4}&\frac{1}{4}&\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&-\frac{1}{10}&-\frac{1}{10}\\ -1&\frac{4}{5}&-\frac{1}{5} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3&5&-9\\1&1&-2\\-2&-3&6 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-1\\ -\frac{1}{2}&0&\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\ 1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\ -1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1&1&0\\ \frac{3}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\ 1&-1&-1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1&-\sqrt{2}&0\\0&1&-\sqrt{3}\\0&0&1 \end{pmatrix}$

Úloha 1.3. Zistite, či je zadaná matica nad poľom $\mathbb{Z}_5$ regulárna; ak áno, nájdite inverznú:
$$\begin{pmatrix} 3&1&1&3\\1&4&0&1\\2&1&1&4\\3&2&2&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&1&3&1\\0&1&3&4\\3&1&2&1\\1&1&4&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&1&3&1\\1&2&4&3\\3&1&2&3\\1&3&1&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&1&3&1\\1&2&3&3\\3&1&4&3\\1&3&2&4 \end{pmatrix},$$
Výsledky: $\begin{pmatrix} 4&0&0&3\\2&4&1&1\\3&1&1&1\\3&0&1&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&2&4&4\\0&0&2&4\\1&2&3&4\\3&0&1&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&4&3&3\\3&4&0&0\\1&0&0&3\\0&3&4&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&1&3\\4&0&3&3\\4&4&2&2\\0&3&4&0 \end{pmatrix}$

Úloha 1.4. Nech $f\colon (\mathbb{Z}_5)^4 \to (\mathbb{Z}_5)^4$ je lineárne zobrazenie také, že $f(1,2,3,1) = (2,0,1,0)$, $f(0,2,3,1) = (1,2,0,3)$, $f(1,0,3,4) = (3,2,1,0)$, $f(4,1,3,2) = (2,3,1,1)$. Nájdite maticu zobrazenia f^{-1}.

Úloha 1.5. Zistite, či $\begin{pmatrix} 1&1&0\\1&0&1\\0&1&1 \end{pmatrix}$ je regulárna a) nad $\mathbb{Z}_2$ b) nad $\mathbb{Z}_3$, ak áno, nájdite inverznú.

Úloha 1.6. Zistite, či pre dané matice A, B nad poľom $\mathbb{Z}_5$ existuje matica X nad tým istým poľom taká, že $AX = B$. Zistite, či je X maticami A, B jednoznačne určená. Ak taká matica existuje, tak aspoň jednu takú maticu nájdite.

a) $A = \begin{pmatrix} 1&1&1\\0&3&1\\3&2&3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1&1&3\\2&0&1\\0&2&3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 0&1&3\\2&1&0\\1&3&1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2&1&0\\0&3&1\\1&3&4 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1&2&1\\2&2&3\\2&3&0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0&3&3\\1&4&0\\3&0&3 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1&2&0\\3&1&0\\1&4&4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0&4&2\\0&2&1\\4&1&3 \end{pmatrix}$.

e) $A = \begin{pmatrix} 1&1&0\\0&1&3\\2&4&1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1&1&1\\0&3&1\\3&2&3 \end{pmatrix}$

f) $A = \begin{pmatrix} 1&1&3\\0&1&1\\2&3&2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2&1&2\\1&1&4\\3&1&0 \end{pmatrix}$

Úloha 1.7. Vypočítajte $A^{-1}B$ a $B^{-1}A$. Skúste to urobiť bez výpočtu A^{-1} resp. B^{-1}.
$A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$
Ako skúšku správnosti môžete vyskúšať, či po vynásobení výsledku zľava maticou A (resp. B) dostanete maticu B (resp. A).

2 Izomorfizmy

Úloha 2.1. Zistite, či pre zadané podpriestory $S, T \subseteq \mathbb{R}^4$ platí $S \cong T$, t.j. či sú izomorfné.
a) $S = [(1,2,3,0),(3,1,3,1),(1,2,1,2)]$, $T = [(1,1,3,2),(1,-1,-1,0),(3,-1,1,2)]$
b) $S = [(1,3,2,2),(1,2,0,3),(1,0,2,-1)]$, $T = [(1,1,1,0),(1,-3,-1,-2),(1,2,2,1)]$
c) $S = [(1,1,0,3),(1,-1,2,-1),(1,2,-1,5)]$, $T = [(3,1,1,2),(1,1,-1,0),(1,2,-3,-1)]$

Úloha 2.2*. a) Ukážte, že ak V je konečnorozmerný vektorový priestor nad poľom $\mathbb{Q}$, tak V je spočítateľná množina.[1]
b) Ukážte, že vektorový priestor $\mathbb{R}$ nad poľom $\mathbb{Q}$ je nekonečnorozmerný.

[1] Táto úloha sa dá riešiť, ak už z iných predmetov poznáte základné veci o spočítateľných množinách.