1 Sústavy

Dimenzia priestoru riešení homogénnej sústavy:

$$d(S) = n - h(A)$$

Úloha 1.1. Nájdite všetky riešenia daných sústav rovníc nad poľom $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & -x_2 & +2x_3 & -3x_4 & = 1 \\ & x_2 & -x_3 & +x_4 & = -3 \\ x_1 & +3x_2 & & -3x_4 & = 1 \\ & -7x_2 & +3x_3 & +x_4 & = 3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \quad &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 \quad &= 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 \quad &= -3 \\ x_3 + x_4 + x_5 \quad &= 2 \\ x_4 + x_5 \quad &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rrrrl} 2x & -5y & +3z & +t & = 5 \\ 3x & -7y & +3z & -t & = -1 \\ 5x & -9y & +6z & +2t & = 7 \\ 4x & -6y & +3z & +t & = 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrl} x & +2y & +4z & -3t & = 0 \\ 3x & +5y & +6z & -4t & = 0 \\ 4x & +5y & -2z & +3t & = 0 \\ 3x & +8y & +24z & -19t & = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrl} x & +4y & -2z & +8t & = 12 \\ & y & -7z & +2t & = -4 \\ & & 5z & -t & = 7 \\ & & z & +3t & = -5 \end{array}$$

Úloha 1.2. Riešte v $\mathbb{Z}_5$ sústavu určenú maticou:
$\left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&0&3&1 \\ 1&2&4&0&2 \\ 2&1&3&4&3 \\ 3&0&4&4&4 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 3&1&2&2&1 \\ 4&4&2&1&0 \\ 0&1&2&4&1 \\ 2&1&1&2&3 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 2&4&1&1&2 \\ 3&3&3&2&1 \\ 1&4&2&1&1 \\ 4&2&0&3&2 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&3&2&4 \\ 2&3&1&1&3 \\ 4&3&1&3&2 \\ 3&4&3&2&1 \end{array}\right)$

Úloha 1.3. Riešte v $\mathbb{R}$ sústavu určenú maticou:
$\left(\begin{array}{ccc|c} 3&-2&1&11 \\ 1&1&-3&7 \\ 11&-4&-3&10 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&-1&2 \\ 3&-1&2&7 \\ 1&0&-1&-2 \\ 2&1&1&7 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&-3&1 \\ -1&3&-2&3 \\ 0&5&-5&4 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1&-2&1&0 \\ 4&1&-1&2 \\ 1&2&4&0 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1&4&-3&0 \\ 1&-3&-1&0 \\ 2&1&-4&0 \end{array}\right)$

Riešenie: a) nemá riešenie, b) (1,2,3) c) $(t - \frac{3}{5}, t + \frac{4}{5}, t)$, d) $(\frac{20}{47}, \frac{6}{47}, -\frac{8}{47})$, e) $(\frac{13}{7}t, \frac{2}{7}t, t)$

Úloha 1.4. Riešte v $\mathbb{Z}_7$ sústavu určenú maticou:
$\left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&1&1&5 \\ 0&1&1&1&6 \\ 3&1&2&3&0 \\ 0&3&6&1&4 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&0&1&0 \\ 2&1&0&3&1 \\ 3&1&1&1&5 \\ 0&1&2&3&6 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 2&1&4&1&4 \\ 1&3&3&1&5 \\ 4&1&5&1&6 \\ 2&3&1&4&2 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&1&3&1 \\ 2&1&2&3&2 \\ 3&1&1&1&1 \\ 0&6&5&3&3 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&1&3&1 \\ 2&3&1&4&2 \\ 1&1&0&1&1 \\ 0&4&4&1&0 \end{array}\right)$

Úloha 1.5. Nájdite reálne čísla a, b, c tak, aby graf funkcie $f(x) = ax^2 + bx + c$ prechádzal bodmi $(1, 2)$, $(-1, 6)$ a $(2, 3)$.

Úloha 1.6. Nájdite hodnotu parametra $b \in \mathbb{R}$, pre ktorú má daná sústava riešenie. Pre túto hodnotu aj vyjadrite množinu riešení.

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 4x_4 &= 3 \\ -x_1 - 5x_2 + 5x_3 - 2x_4 &= b \\ 3x_1 + 10x_2 - 5x_3 + 6x_4 &= 4 \end{aligned}$$

Úloha 1.7. Zistite pre aké hodnoty parametra $a \in \mathbb{R}$ systém

$$\begin{aligned} x + y + 7z &= -7 \\ 2x + 3y + 17z &= -16 \\ x + 2y + (a^2 + 1)z &= 3a \end{aligned}$$

a) má práve jedno riešenie; b) má nekonečne veľa riešení; c) nemá žiadne riešenie.

Úloha 1.8. V závislosti od parametra $a \in \mathbb{R}$ riešte systém daný maticou:
a) $\left(\begin{smallmatrix} a & 1 & | & a^2 \\ 1 & a & | & 1 \end{smallmatrix}\right)$ b) $\left(\begin{smallmatrix} a & 1 & | & a^3 \\ 1 & a & | & 1 \end{smallmatrix}\right)$

Úloha 1.9. Ako vyzerajú, v závislosti od parametra p, riešenia sústavy danej maticou:
$\left(\begin{smallmatrix} p & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & p & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & p & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & p & | & 1 \end{smallmatrix}\right)$

2 Súčty podpriestorov

$$d(S) + d(T) = d(S+T) + d(S \cap T)$$

Úloha 2.1. Nájdite nejakú homogénnu sústavu rovníc so 4 neznámymi nad $\mathbb{R}$, ktorej riešením je daný podpriestor:
a) $S = [(1,4,0,1),(1,0,3,-3),(0,2,0,1)]$
b) $S = [(1,-1,1,-2),(1,1,0,-1),(3,1,1,-4)]$

Úloha 2.2. Zistite $d(U)$, $d(V)$, $d(U+V)$, $d(U \cap V)$, bázu $U+V$ a bázu $U \cap V$
a) v $\mathbb{R}^2$ pre $U = [(2,5)]$, $V = [(1,3)]$
b) v $\mathbb{R}^3$ pre $U = [(1,2,3),(-1,2,3)]$, $V = [(2,1,4),(-2,1,4)]$
c) v $\mathbb{R}^4$ pre $U = [(1,0,1,0),(1,0,0,1)]$, $V = [(1,1,1,0),(1,0,1,1)]$
d) v $\mathbb{R}^4$ pre $U = [(1,2,3,4),(1,1,1,1),(4,3,2,1)]$, $V = [(1,1,0,0),(0,0,1,1),(1,0,0,0)]$.
[a)1,1,2,0; b)2,2,3,1; c)2,2,4,0; d)2,3,4,1]

Úloha 2.3. Nech $T = [(1,3,2),(2,1,3),(3,4,0)]$ je podpriestor $(\mathbb{Z}_5)^3$. Existuje podpriestor S taký, že $(\mathbb{Z}_5)^3 = T \oplus S$? Ak áno, nájdite ho! Je tento podpriestor jednoznačne určený?

Úloha 2.4. Pre dané podpriestory S, T priestoru V nájdite bázu a dimenziu $S \cap T$. Viete zistiť aj čomu sa rovná dimenzia $S+T$?
a) $S = [(2,0,3,1),(1,-1,0,0)]$, $T = [(1,-1,-1,0),(0,2,4,1)]$ vo $V = \mathbb{R}^4$
b) $S = [(1,0,1,-2),(1,1,-1,3)]$, $T = [(1,2,0,1),(2,3,1,1),(2,-1,-1,1)]$ vo $V = \mathbb{R}^4$
c) c) $S = [(1,1,1,1,0),(2,1,0,3,-2),(1,0,1,0,0)]$ a $T = [(1,1,0,0,3),(1,0,1,1,1),(0,1,1,-1,0)]$ vo $V = \mathbb{R}^5$
Výsledky: a) $\dim(S) = \dim(T) = 2$, $\dim(S \cap T) = 1$, $\dim(S+T) = 3$; b) $\dim(S) = 2$, $\dim(T) = 3$, $\dim(S \cap T) = 1$, $\dim(S+T) = 4$; c) $\dim(S) = 3$, $\dim(T) = 3$, $\dim(S \cap T) = 1$, $\dim(S+T) = 5$.

Úloha 2.5. Nech $S \neq T$ sú dva podpriestory vektorového priestoru F^3 nad poľom F a $d(S) = 2$, $d(T) = 2$. Dokážte, že $d(S \cap T) \geq 1$.

Úloha 2.6. Ak máme zadané podpriestory

$$\begin{aligned} W_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x + y - z = 0\}, \\ W_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 3x + y - 2z = 0\}, \\ W_3 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x - 7y + 3z = 0\}, \end{aligned}$$

nájdite $\dim(W_1 \cap W_2 \cap W_3)$ a $\dim(W_1 + W_2)$, $\dim(W_1 + W_3)$, $\dim(W_2 + W_3)$.

Úloha 2.7. Ukážte na príklade, že vo všeobecnosti sa $d(S_1 + S_2 + S_3)$ nemusí rovnať[1]

$$d(S_1) + d(S_2) + d(S_3) - d(S_1 \cap S_2) - d(S_1 \cap S_3) - d(S_2 \cap S_3) + d(S_1 \cap S_2 \cap S_3).$$

[1] Takáto rovnosť by bola analógiou rovnosti pre počet prvkov zjednotenia: $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$.