Determinanty

Úloha 1. Vypočítajte determinanty: $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$
Ak existuje inverzná matica, aký bude jej determinant. Výsledky (bez záruky): 0,−8, 8.

Úloha 2. Určte determinanty daných matíc. Viete na základe výsledku určiť ich hodnosť pre niektoré hodnoty $c \in \mathbb{R}$?
$\begin{vmatrix} 1 & 2 & c-1 \\ c-2 & 1 & 0 \\ c & 1 & 0 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & c-1 \\ c-2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & c \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 2 & c+1 & 0 \\ 2 & c-1 & 2c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Úloha 3*. $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = ?$

Úloha 4*. $D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a+b & ab \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} = ?$

Úloha 5*. $D_n = \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 1 & \dots & 1 & 1 & n \end{vmatrix} = ?$

Úloha 6*. Vypočítajte determinant matice typu $n \times n$

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & \dots & a & x & a \\ a & \dots & a & a & x \end{vmatrix} = ?$$

(Teda ide o maticu, kde diagonálne prvky sú rovné x a všetky prvky mimo diagonály sú rovné a.)

Úloha 7*. $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & n \end{vmatrix} = ?$

Úloha 8*. Nájdite determinant matice A_n typu $n \times n$, ktorej prvky sú určené predpisom $a_{ij} = \min\{i, j\}$, t.j. napríklad

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Úloha 9. Nech A je matica typu 7×7, ktorej prvky sú nepárne celé čísla. Ukážte, že $|A|$ je celé číslo a ďalej, že $|A|$ je celočíselný násobok čísla 64.

Úloha 10. Ak A, B sú štvorcové matice a matica AB je regulárna, tak obe matice A, B sú regulárne. (Môžete sa zamyslieť nad tým, či to viete zdôvodniť s pomocou determinantov a aj nad riešením bez nich. Takisto sa môžete skúsiť zamyslieť nad tým, čo sa stane ak matice nie sú štvorcové.)

Úloha 11*. Majme regulárnu maticu A a sústavu tvaru $A\vec{x}^T = \vec{b}^T$. Označme ako A_i maticu, ktorá vznikne ak v matici A nahradíme i-ty stĺpec pravými stranami.

a) Vedeli by ste vymyslieť vhodnú maticu tak aby platilo $A \cdot B_i = A_i$?
b) Ak ste našli takú maticu, vedeli by ste pomocou nej odvodiť Cramerovo pravidlo?

Úloha 12. Ak viete, že 195, 403 a 247 sú násobky čísla 13, viete ukázať (bez toho, aby ste ho museli vyrátať), že aj $\left|\begin{smallmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{smallmatrix}\right|$ je celočíselný násobok 13?

Úloha 13. Nech A je matica 4×4, ktorá obsahuje iba čísla ± 1. Ukážte, že $|A|$ je celočíselný násobok 8.

Úloha 14. Vypočítajte determinant

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}.$$

Úloha 15. Ukážte, že ak $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, tak

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0$$

Úloha 16. Ukážte, že

$$\begin{vmatrix} x^2 & (x+1)^2 & (x+2)^2 \\ (x+1)^2 & (x+2)^2 & (x+3)^2 \\ (x+2)^2 & (x+3)^2 & (x+4)^2 \end{vmatrix} = -8$$

pre ľubovoľné $x \in \mathbb{R}$.

Úloha 17. Vypočítajte determinant matice $\left|\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right|$. Použite súčin

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

na odvodenie identity $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$. (Fibonacciho identita)