Úloha 2.1. Vypočítajte $A^2 + 2AB + B^2$, $A^2 + 2BA + B^2$, $A^2 + AB + BA + B^2$, $(A + B)^2$, ak $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

Úloha 2.2. Vyrátajte EA a AE pre $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ a a) $E = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ b) $E = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ c) $E = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ d) $E = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Vedeli by ste nájsť riadkovú/stĺpcovú operáciu, pomocou ktorej dostaneme z matice A maticu EA resp. AE? (Viac sa o súvise násobenia matíc a elementárnych riadkových/stĺpcových sa dá nájsť v texte.).

Poznámka 5.6.7. Ďalší užitočný fakt, ktorý by nám mal byť po prečítaní tejto kapitoly jasný, je, že násobenie maticou A zľava zodpovedá vytvoreniu lineárnych kombinácii riadkov v matici B (riadky matice A určujú koeficienty).

Podobne, ak maticu B násobíme maticou A sprava, tak stĺpce v BA budú lineárne kombinácie stĺpcov B s koeficientmi určenými stĺpcami matice A.

(Videli sme, že niečo takéto platí pre matice riadkových operácií. Priamo z definície násobenia matíc sa dá overiť, že to platí aj pre ľubovoľné matice.)

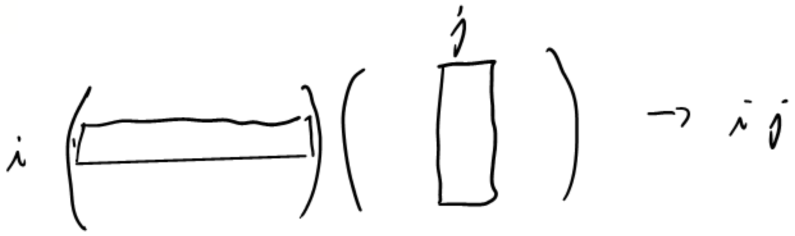
Úloha 1.2. Nájdite inverznú maticu k daným maticiam nad $\mathbb{R}$:
$\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & \sqrt{6} \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Výsledky:
$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ -1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -9 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

SÚČIN MATÍC

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{t=1}^{n} a_{it} b_{tj}}$$

$m \times \boxed{n \quad n} \times k$

$A \cdot B =$



$m \times n \quad n \times k = m \times k$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$2 \times \boxed{3} \qquad \boxed{3} \times 2 \qquad 2 \times 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \boxed{0 \quad 1 \quad -2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\3\\1\end{matrix}} & \begin{matrix}0\\2\\1\end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ \boxed{1} & \end{pmatrix}$$

$0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 1$

$0 \quad 1 \quad -2$

$1 \quad 3 \quad 1$

Úloha 2.1. Vypočítajte $A^2 + 2AB + B^2$, $A^2 + 2BA + B^2$, $A^2 + AB + BA + B^2$, $(A+B)^2$, ak $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad AB = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B^2 = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ $\quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$\boxed{AB \neq BA}$

$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$

$A^2 + 2BA + B^2 = \begin{pmatrix} 10 & 16 \\ 8 & 14 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\begin{aligned} A^2 + AB + BA + B^2 &= \begin{pmatrix} 12 & 16 \\ 8 & 12 \end{pmatrix} \\ (A+B)^2 &= \begin{pmatrix} 12 & 16 \\ 8 & 12 \end{pmatrix} \end{aligned}}$$

$A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$11: \quad 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 7$

$12: \quad 1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 6$

$$A+B=\begin{pmatrix}2&4\\2&2\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&4\\2&3\end{pmatrix}$$

$$(A+B)^2=2^2\cdot\begin{pmatrix}3&4\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&16\\8&12\end{pmatrix}$$

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \qquad a,b\in\mathbb{R}$$

$$\boxed{(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2} \leftarrow$$

$$(A+B)(A+B)=A(A+B)+B(A+B)$$
$$=A^2+AB+BA+B^2$$

KOMUTUJÚ

$$C\cdot(A+B)=C\cdot A+C\cdot B$$
$$(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$$

$$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2 \Leftarrow \text{ak } \boxed{AB=BA}$$

$$(I+B)^2=I^2+2B+B^2 \qquad I\cdot B=B\cdot I=B$$

Úloha 2.2. Vyrátajte EA a AE pre $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&0&-1\\-1&-2&1\end{pmatrix}$ a a) $E=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ b) $E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ c) $E=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ d) $E=\begin{pmatrix}1&0&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. Vedeli by ste nájsť riadkovú/stĺpcovú operáciu, pomocou ktorej dostaneme z matice A maticu EA resp. AE? (Viac sa o súvise násobenia matíc a elementárnych riadkových/stĺpcových sa dá nájsť v texte.).

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&0&-1\\-1&-2&1\end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad EA=\begin{pmatrix}0&0&4\\1&0&-1\\-1&-2&1\end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad EA=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&0&-3\\-1&-2&1\end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} \qquad EA=\begin{pmatrix}-1&-2&1\\1&0&-1\\1&2&3\end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix}1&0&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad EA=\begin{pmatrix}4&8&0\\1&0&-1\\-1&-2&1\end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad EA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad R_1 \leftarrow R_1 + R_3$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad EA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad R_2 \leftarrow 3R_2$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad EA = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad R_1 \leftrightarrow R_3$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad EA = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad R_1 \leftarrow R_1 - 3R_3$$

ERO = násobenie vhodnou maticou ZĽAVA

$$\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times k}{B} = \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \\ \vdots \\ \vec{b}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ a_{i1}\vec{b}_1 + a_{i2}\vec{b}_2 + \dots + a_{in}\vec{b}_n \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{LK riadkov } B \text{, koef. sú v } A}$$

ZĽAVA

INVERZNÁ MATICA

$A \in M_{n,n}(F)$ $\quad n \times n$

$$A \cdot B = B \cdot A = I \qquad B = A^{-1}$$

$$f_{A^{-1}} = (f_A)^{-1}$$

Úloha 1.2. Nájdite inverznú maticu k daným maticiam nad $\mathbb{R}$:

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & \sqrt{6} \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Výsledky:
$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ -1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -9 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix}1&3&1\\2&4&3\\3&1&2\end{pmatrix}\qquad A^{-1}=\,?\qquad (A\,|\,I)\sim\dots\sim(I\,|\,A^{-1})$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&1&1&0&0\\2&4&3&0&1&0\\3&1&2&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&1&1&0&0\\1&1&2&-1&1&0\\3&1&2&0&0&1\end{array}\right)\sim$$

$f_A \quad f_A^{-1}$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&1&1&0&0\\1&1&2&-1&1&0\\2&0&0&1&-1&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&3&1&\frac12&\frac12&-\frac12\\0&1&2&-\frac32&\frac32&-\frac12\\1&0&0&\frac12&-\frac12&\frac12\end{array}\right)(-3)$$

SKÚŠKA: $\frac12\vec{a}_1+\frac12\vec{a}_2-\frac12\vec{a}_3$ $\quad \frac12 \quad \frac12 \quad -\frac12$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&3&1&\frac12&\frac12&-\frac12\\0&1&2&-\frac32&\frac32&-\frac12\\&&&\frac12&-\frac12&\frac12\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&0&-5&5&-4&\overset{1}{4}\\0&1&2&-\frac32&\frac32&-\frac12\\1&0&0&\frac12&-\frac12&\frac12\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac12&-\frac12&\frac12\\0&1&2&-\frac32&\frac32&-\frac12\\0&0&1&-1&\frac45&-\frac45\end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac12&-\frac12&\frac12\\0&1&0&\frac12&-\frac1{10}&\frac{11}{10}\\0&0&1&-1&\frac45&-\frac45\end{array}\right)\qquad A=\begin{pmatrix}1&3&1\\2&4&3\\3&1&2\end{pmatrix}$$

$$\frac{5}{10}(1,3,1)-\frac{1}{10}(2,4,3)+\frac{11}{10}(3,1,2)$$

$$\frac32-\frac85=\frac{15-16}{10}=-\frac1{10}\qquad -\frac12+\frac85=\frac{-5+16}{10}$$

SKÚSIŤ opraviť:
$$\begin{pmatrix}\frac12&-\frac12&\frac12\\\frac12&-\frac1{10}&-\frac1{10}\\-1&\frac45&-\frac15\end{pmatrix}$$

Úloha 1.5. Zistite, či $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ je regulárna a) nad $\mathbb{Z}_2$ b) nad $\mathbb{Z}_3$, ak áno, nájdite inverznú.

Úloha 2.6. Nech $C = AB$, kde A, B sú matice. Musí potom platiť $V_C \subseteq V_A$? Musí platiť $\boxed{V_C \subseteq V_B}$? Musí platiť $V_A \subseteq V_C$, $V_B \subseteq V_C$? (Svoje tvrdenie zdôvodnite, t.j. dokážte, alebo nájdite kontrapríklad.)

$$\underset{m \times n}{C} = \underset{m \times n}{A} \cdot \underset{n \times k}{B} \qquad V_C \subseteq V_B \qquad B = \begin{pmatrix} \vec{b_1} \\ \vec{b_2} \\ \vdots \\ \vec{b_n} \end{pmatrix}$$

$$V_B = [\vec{b_1}, \vec{b_2}, \dots, \vec{b_n}]$$

Riadky C sú LK riadkov B, t.j.

$$V_C \subseteq [\vec{b_1}, \vec{b_2}, \dots, \vec{b_n}]$$

Úloha 2.8. Nech A, B sú matice nad poľom F typu $m \times n$ resp. $n \times k$. Dokážte, že $\boxed{h(AB) \leq h(B)}$. Dokážte, že ak $m = n$ a A je regulárna, tak $h(AB) = h(B)$.

$$h(AB) = h(C) = \dim(V_C) \leq \dim(V_B) = h(B)$$

$$V_C \subseteq V_B$$

$$h(AB) \leq h(B)$$

Úloha 2.6. Nech $C = AB$, kde A, B sú matice. Musí potom platiť $\cancel{V_C \subseteq V_A}$? Musí platiť $V_C \subseteq V_B$? Musí platiť $\cancel{V_A \subseteq V_C}$, $\cancel{V_B \subseteq V_C}$? (Svoje tvrdenie zdôvodnite, t.j. dokážte, alebo nájdite kontrapríklad.)

OTÁZKA: Nájdi A, B 2×2

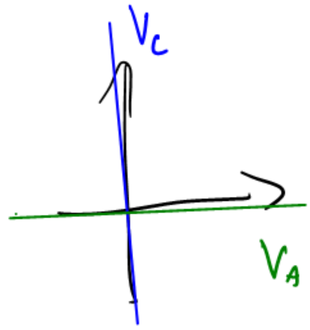
$$A \cdot B = 0 \qquad A \neq 0 \quad B \neq 0$$

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \underset{B}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{C}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$V_A = [(1,0)] \qquad V_C = \{\vec{0}\} = \{(0,0)\}$$

$$V_B = [(0,1)] \qquad V_A \not\subseteq V_C \qquad V_B \not\subseteq V_C$$

2.6: $C = A \cdot B$ $\qquad V_C \not\subseteq V_A$



2×2 $\qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$V_C = [(0,1)] \not\subseteq V_A = [(1,0)]$

$$\boxed{C = A \cdot B \Rightarrow V_C \subseteq V_B}$$

Úloha 2.8. Nech A, B sú matice nad poľom F typu $m \times n$ resp. $n \times k$. Dokážte, že $h(AB) \leq h(B)$. Dokážte, že ak $m = n$ a A je regulárna, tak $\boxed{h(AB) = h(B)}$.

$\underset{m \times m}{A}$ je regulárna $\Leftrightarrow h(A) = m \Leftrightarrow$ Existuje A^{-1}

VIEME: $\boxed{h(AB) \leq h(B)}$ (*)

$? \geq ?$

$(A^{-1}A)\,B = A^{-1} \cdot (A\,B) = B$

$\underbrace{A^{-1}A}_{1}\,B = 1 \cdot B = B$

$u.\ A^{-1}$

$h(B) = h(A^{-1} \cdot AB) \overset{(*)}{\leq} h(AB)$

$$\boxed{h(B) \leq h(AB)}$$

$h(B) \geq h(AB)$

$h(B) \leq h(AB)$

$h(B) = h(AB)$