Zobrazenia

4. októbra 2024

Karteziánsky súčin

Definícia

Ak A, B sú množiny, tak ich *karteziánsky súčin* je množina všetkých usporiadaných dvojíc (a, b) takých, že $a \in A$ a $b \in B$. Označujeme ho

$$A \times B = \{(a, b); a \in A, b \in B\}.$$

Usporiadaná dvojica:

$$(a, b) = (a', b') \qquad \Leftrightarrow \qquad (a = a') \wedge (b = b')$$

Karteziánsky súčin

Definícia

Ak A, B sú množiny, tak ich *karteziánsky súčin* je množina všetkých usporiadaných dvojíc (a, b) takých, že $a \in A$ a $b \in B$. Označujeme ho

$$A \times B = \{(a, b); a \in A, b \in B\}.$$

$$\{0, 1\} \times \{0, 1\} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$$

Definícia zobrazenia

Definícia

Zobrazenie $f : X \to Y$ z množiny X do množiny Y je podmnožina f množiny $X \times Y$ taká, že ku každému $x \in X$ existuje práve jedno $y \in Y$ s vlastnosťou $(x, y) \in f$.

Množinu X budeme tiež nazývať *definičný obor* zobrazenia f a množina Y je *obor hodnôt* zobrazenia f.

Namiesto zápisu $(x, y) \in f$ budeme používať zápis $y = f(x)$.

Definícia zobrazenia

Definícia

Zobrazenie $f : X \to Y$ z množiny X do množiny Y je podmnožina f množiny $X \times Y$ taká, že ku každému $x \in X$ existuje práve jedno $y \in Y$ s vlastnosťou $(x, y) \in f$.

Menej formálne: Predpis, ktorý každému prvku x množiny X priradí nejaký prvok $f(x) \in Y$.

Príklady zobrazení

Príklad

Uvedieme niekoľko príkladov zobrazení.

$f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f_1(n) = 2n + 1$

$f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f_2(n) = 2n$

$$f_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f_3(n) = \begin{cases} n+1, & \text{ak } n \text{ je párne} \\ n-1, & \text{ak } n \text{ je nepárne} \end{cases}$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x \cdot \sin x$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \sin x$

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = x^2$

Rovnosť zobrazení

Definícia

Hovoríme, že dve zobrazenia $f\colon X \to Y$ a $g\colon Z \to W$ sa *rovnajú,* ak $X = Z$, $Y = W$ a $f(x) = g(x)$ pre každé $x \in X$. (Inými slovami, ak sa rovnajú ich definičné obory, obory hodnôt a obe zobrazenia nadobúdajú v každom bode rovnakú hodnotu.) Rovnosť zobrazení označujeme $f = g$.

Skladanie zobrazení

Skladanie zobrazení

Definícia (Skladanie zobrazení)

Ak $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ sú zobrazenia, tak *zložením zobrazení* f a g nazývame zobrazenie $g \circ f\colon X \to Z$ také, že pre každé $x \in X$ platí

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "g \circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & Z \\
& Y \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Skladanie zobrazení

Skladanie zobrazení

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[rr, "g \circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & g(f(x)) \\
& f(x) \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Skladanie zobrazení

Tvrdenie (Asociatívnosť skladania zobrazení)

Nech $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, $h\colon Z \to W$ *sú zobrazenia, potom*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$$
$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$$

Definície

Definícia

Nech $f\colon X \to Y$ je zobrazenie. Hovoríme, že f je *injektívne* (*prosté*) *zobrazenie* (alebo tiež injekcia), ak pre všetky $x, y \in X$ také, že $x \neq y$ platí $f(x) \neq f(y)$.
Hovoríme, že f je *surjekcia* (*surjektívne zobrazenie, zobrazenie na*), ak pre každé $y \in Y$ existuje také, $x \in X$, že $f(x) = y$.
Hovoríme, že f je *bijekcia* (*bijektívne zobrazenie*), ak f je súčasne injekcia aj surjekcia.

Definícia injekcie

Dve ekvivalentné definícia injekcie:

- $(\forall x, y \in X)(x \neq y \;\Rightarrow f(x) \neq f(y))$
- $(\forall x, y \in X)(f(x) = f(y) \;\Rightarrow x = y)$

$$P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \Rightarrow \neg P$$

Injekcia, surjekcia a bijekcia

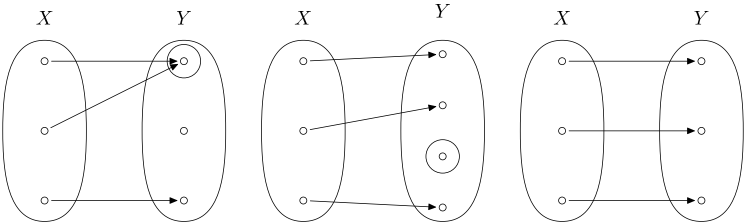

Figure: Ilustrácia injekcie, surjekcie a bijekcie

Injekcia, surjekcia a bijekcia

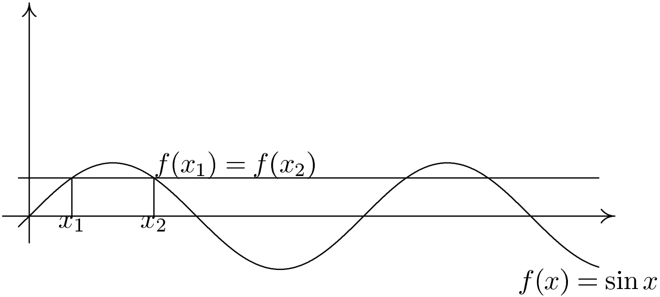

Figure: Ak vodorovná priamka pretne graf v 2 bodoch, zobrazenie nie je injektívne

Injekcie, surjekcie, bijekcie a skladanie

Pre zobrazenia $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ platí:

- Ak f aj g sú injekcie, tak aj $g \circ f$ je injekcia.
- Ak f aj g sú surjekcie, tak aj $g \circ f$ je surjekcia.
- Ak f aj g sú bijekcie, tak aj $g \circ f$ je bijekcia.

Identita

Definícia

Zobrazenie $id_X \colon X \to X$ také, že $id_X(x) = x$ pre každé $x \in X$ sa nazýva *identické zobrazenie* (*identita*).

Pre ľubovoľné zobrazenie $f \colon X \to Y$ platí

$$f \circ id_X = f \qquad \text{a} \qquad id_Y \circ f = f .$$

Inverzné zobrazenie

Definícia

Nech $f\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to X$ sú zobrazenia. Ak platí

$$g \circ f = id_X$$
$$f \circ g = id_Y$$

tak hovoríme, že zobrazenie g je *inverzné zobrazenie k f*.

- Ak inverzné zobrazenie existuje, tak je určené jednoznačne.
- Označenie: f^{-1}

Inverzné zobrazenie

$$f^{-1} \circ f = id_X$$
$$f \circ f^{-1} = id_Y$$

Pre každé $x \in X$ a pre každé $y \in Y$ platí

$$f^{-1}(f(x)) = x,$$
$$f(f^{-1}(y)) = y.$$

Inverzné zobrazenie

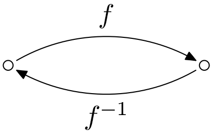

Figure: Inverzné zobrazenie

Inverzné zobrazenie

Tvrdenie

Inverzné zobrazenie k f existuje práve vtedy, keď f je bijekcia.

Inverzné zobrazenie

Tvrdenie

Nech $f: X \to Y$ a $g: Y \to Z$ sú bijekcie. Potom

$$(f^{-1})^{-1} = f$$
$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Dôsledok

Ak f je bijekcia, tak aj f^{-1} je bijekcia.

Inverzné zobrazenie

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

$$f^{-1} \circ f = id_X$$
$$f \circ f^{-1} = id_Y$$

Inverzné zobrazenie

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = \\ = f^{-1} \circ id_Y \circ f = f^{-1} \circ f = id_X\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = \\ = g^{-1} \circ id_Y \circ g = g^{-1} \circ g = id_Z\end{aligned}$$