Grupy, podgrupy

Úloha 1. Zistite, či $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \Box)$, kde pre každé $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ definujeme $(a, b)\Box(c, d) = (2ac, b + d)$, je grupa.

Úloha 2. Nech $(G, *_G)$ a $(H, *_H)$ sú grupy. Ukáže, množina $G \times H$ spolu s operáciou $*$ definovanou ako

$$(g_1, h_1) * (g_2, h_2) = (g_1 *_G g_2, h_1 *_H h_2)$$

tvorí grupu.

Úloha 3. Nech $(G, \cdot)$ je grupa a $P(G)$ je systém všetkých podmnožín G. Dokážte, že operácia $\cdot$ na množine $P(G)$ daná predpisom

$$A \cdot B = \{a \cdot b; a, b \in G\}$$

je asociatívna. Tvorí $P(G) \setminus \{\emptyset\}$ s touto operáciou grupu? Ak nie, viete zistiť či existuje neutrálny prvok a pre ktoré prvky existuje inverzný prvok?

Úloha 4. Dokážte, že matice typu $n \times n$ nad poľom $\mathbb{R}$, ktorých determinant je rovný 1, s operáciou násobenia matíc, tvoria grupu.

Úloha 5. Matice typu $n \times n$, ktoré v každom riadku a každom stĺpci majú práve jednu jednotku a ostatné prvky sú nulové, s operáciou násobenia matíc tvoria grupu. (Hint: Súvisia tieto matice nejako s permutáciami? Akým lineárnym zobrazeniam zodpovedajú?)

Úloha 6. Ak A, B, C sú podgrupy G a $C \subseteq A \cup B$, tak $C \subseteq A$ alebo $C \subseteq B$.

Úloha 7. Doplňte nasledujúcu tabuľku

	a	b	c	d
a				
b				d
c			d	
d				

tak aby ste dostali grupu.

Úloha 8*. Nech G je grupa a $a, b \in G$. Nech pre tieto prvky platia rovnosti $aba = ba^2b$, $a^3 = e$ a pre nejaké $n \in \mathbb{N}$ platí $b^{2n-1} = e$. Dokážte, že $b = e$. (Hint vedeli by ste ukázať $ab^2 = b^2a$? Dá sa to ďalej použiť na dôkaz, že pre tieto prvky platí $ab = ba$?)