## Homomorfizmy a izomorfizmy

Na pripomenutie: Homomorfizmus $f\colon (G,\circ) \to (H,*)$

$$f(g_1 \circ g_2) = f(g_1) * f(g_2)$$

Bijektívny homomorfizmus voláme izomorfizmus (injektívny homomorfizmus voláme monomorfizmus, surjektívny homomorfizmus voláme epimorfizmus).

Ak existuje izomorfizmus $f\colon (G,*) \to (H,\circ)$, tak hovoríme, že grupy $G$ a $H$ sú izomorfné, označujeme $(G,*) \cong (H,\circ)$ resp. $G \cong H$. Ak existuje epimorfizmus $f\colon (G,*) \to (H,\circ)$, tak hovoríme, že grupa $H$ je homomorfným obrazom grupy $G$.

**Úloha 1.** Pre dané grupy $G$, $H$ a zobrazenie $f\colon G \to H$ overte, či $f$ je homomorfizmus. Zistite aj, či je dané zobrazenie injektívne, surjektívne, bijektívne.
a) $G = H = (\mathbb{Z},+)$, $f(x) = x+1$
b) $G = (\mathbb{R},+)$, $H = (\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$, $f(x) = x$
c) $G = (\mathbb{Z},+)$, $H = (\{\pm 1\},\cdot)$ a zobrazenie $f$ je definované ako

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ak } x \text{ je párne,} \\ -1 & \text{ak } x \text{ je nepárne.} \end{cases}$$

d) $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) = \{A \in M_{2,2}(\mathbb{R}), \det(A) \neq 0\}$ (t.j. regulárne matice) s operáciou násobenia matíc, $H = (\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$, $f(A) = \det(A)$
e) $G = (\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$, $H = (\mathbb{Q}^+,\cdot)$, $f(x) = |x|$
f) $G = (\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$, $H = (\mathbb{Q}^+,\cdot)$, $f(x) = x^2$

**Úloha 2.** a) Dokážte, že $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$ s operáciou $*$ definovanou ako $(a,b)*(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$ tvorí grupu.
b) Dokážte, že všetky nenulové matice tvaru $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right)$ tvoria s násobením matíc grupu. (Hint k obom častiam úlohy: Možno vám pomôže nájsť jednoduchšie riešenie to, že táto úloha je v časti o homomorfizmoch.)

**Úloha 3.** Zistite, či sú grupy $G$ a $H$ izomorfné:
a) $G = (\mathbb{Z}_6,\oplus)$, $H = (S_3,\circ)$
b) $G = (\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)\times(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$, $H = (\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$
c) $G = (\mathbb{Z}_6,\oplus)$, $H = (\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3,\oplus)$
d) $G = (\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$, $H = (\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$
e) $G = (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2,+)$, $H = (\mathbb{Z},+)$ (Sčitovanie v $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2$ chápeme tak, že na prvej súradnici používame obvyklé sčitovanie a na druhej sčitujeme modulo 2, t.j. tak ako sme definovali priamy súčin grúp.)

**Úloha 4.** Zistite, či sú grupy $G$ a $H$ izomorfné a či je grupa $H$ homomorfným obrazom grupy $G$. Svoju odpoveď zdôvodnite!
a) $G = (\mathbb{R},+)\times(\mathbb{R},+)$, $H = (\mathbb{C},+)$
b) $G = (\mathbb{Q},+)$, $H = (\mathbb{R},+)$
c) $G = (\mathbb{Q},+)$, $H = (\mathbb{Q}^+,\cdot)$
d) $G = (\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$, $H = (\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$
d) $G = (\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$, $H = (\mathbb{R}^+,\cdot)$
f) $G = (\mathbb{Q},+)$, $H = (\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$

**Úloha 5.** Zistite, či sú grupy $G$ a $H$ izomorfné a či je niektorá z nich homomorfným obrazom druhej. Svoju odpoveď zdôvodnite!
a) $G = (\mathbb{R}, +)$, $H = (\mathbb{R}^+, \cdot)$
b) $G = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $H = (\mathbb{R}^+, \cdot)$
c) $G = (\mathbb{Z}_4, \oplus)$, $H = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \oplus)$

**Úloha 6.** Nech $H$ je podgrupa grupy $G$. Nech $g \in G$. Ukážte, že $gHg^{-1} = \{ghg^{-1}; h \in H\}$ je podgrupa grupy $G$.

**Úloha 7.** Nech $(G, \circ)$ je grupa. Je zobrazenie $g \mapsto g^{-1}$ izomorfizmus z $G$ na $G$? Ak nie, vedeli by ste definovať binárnu operáciu $*$ na $G$, tak, aby toto zobrazenie bol izomorfizmus grúp $(G, \circ)$ a $(G, *)$? Je uvedené zobrazenie izomorfizmom, ak $G$ je komutatívna?

**Úloha 8.** Nech $f\colon G \to H$ je homomorfizmus grúp. Dokážte:
a) Zobrazenie $f$ je surjektívne práve vtedy, keď $\operatorname{Im} f = H$.
b) Zobrazenie $f$ je injektívne práve vtedy, keď $\operatorname{Ker} f = \{e\}$.

**Úloha 9.** Nech $G$ je grupa, $a \in G$. Dokážte, že zobrazenie $f_a\colon G \to G$ definované predpisom $f_a(x) = axa^{-1}$ je izomorfizmus.

**Úloha 10.** Nech $a, b \in G$, kde $G$ je grupa, $a, b \neq e$, pričom platí $ab = ba$ a $b^3 = e$. Dokážte, že $\{a^n, ba^n, b^2a^n; n \in \mathbb{Z}\}$ je podgrupa grupy $G$.

**Úloha 11.** Nech $f\colon (G, *) \to (H, \circ)$ je homomorfizmus. Dokážte, že potom platí:
a) $f(a^n) = f(a)^n$
b) $a^n = e_G \Rightarrow f(a)^n = e_H$
c) Ak $f$ je navyše izomorfizmus, tak $a^n = e_G \Rightarrow f(a)^n = e_H$.
d) Izomorfizmus zachováva rád prvku, t.j. rád prvku $a$ v grupe $G$ je rovnaký ako rád prvku $f(a)$ v grupe $H$.
e) Viete niečo povedať o vzťahu medzi rádmi prvkov $a$ a $f(a)$ aj ak $f$ je homomorfizmus? (T.j. bez predpokladu o bijektívnosti.)