

Rád prvku

Úloha 1. Nech $f: (G, *) \rightarrow (H, \circ)$ je homomorfizmus. Dokážte, že potom platí:

a) $f(a^n) = f(a)^n$

b) $a^n = e_G \Rightarrow f(a)^n = e_H$

c) Ak f je navyše izomorfizmus, tak $a^n = e_G \Leftrightarrow f(a)^n = e_H$.

d) Izomorfizmus zachováva rád prvku, t.j. rád prvku a v grupe G je rovnaký ako rád prvku $f(a)$ v grupe H .

e) Viete niečo povedať o vzťahu medzi rádmi prvkov a a $f(a)$ aj ak f je homomorfizmus? (T.j. bez predpokladu o bijektivnosti.)

Úloha 2. Nech G je grupa, $a \in G$. Dokážte, že zobrazenie $f_a: G \rightarrow G$ definované predpisom $f_a(x) = axa^{-1}$ je izomorfizmus.

Úloha 3. V každej grupe majú nasledujúce prvky rovnaký rád: x a xyx^{-1} ; ab a ba ; abc , bca a cab . Naopak, prvky abc a cba môžu mať rôzny rád. (Hint: Jedna možnosť ako dokázať, že dva prvky $g, h \in G$ majú rovnaký rád je dokázať ekvivalenciu $g^n = e \Leftrightarrow h^n = e$. Iná možnosť je nájsť izomorfizmus $\varphi: G \rightarrow G$ taký, že $\varphi(g) = h$, a použiť fakt, že izomorfizmy zachovávajú rád prvkov.)

Úloha 4. Ak rád prvku a v grupe G je n a e je neutrálny prvok tejto grupy, tak pre prirodzené čísla $k \in \mathbb{N}$ platí $a^k = e$ práve vtedy, keď $n \mid k$. Ďalej pre každé $s \in \mathbb{N}$ existuje $m \in \mathbb{N}$ také, že $a^s = a^m$ a $0 \leq m \leq n - 1$.

Úloha 5. Nech G je grupa, $a \in G$ je prvok konečného rádu n . Nech H je podgrupa grupy G a $k = \min\{j \in \mathbb{N}; j > 0, a^j \in H\}$, t.j. k je najmenšie kladné prirodzené číslo také, že $a^k \in H$. Dokážte, že $k \mid n$; t.j. k delí rád prvku g .

Permutácie

Na pripomenutie: Každú permutáciu vieme (jednoznačne) rozložiť na disjunktné cykly, z tohoto rozkladu vieme zistiť jej rád a paritu. Pre cykly ľahko vieme vyrátať inverznú permutáciu: $(1324)^{-1} = (4231)$.

Každý cyklus možno zapísať viacerými spôsobmi: $(1324) = (3241) = (2413) = (4132)$.

Disjunktné permutácie (a teda aj disjunktné cykly) komutujú.

Permutácie vieme rozložiť aj na transpozície. Cykly vieme rozložiť napríklad takto:

$$(a_1 a_2 \dots a_n) = (a_1 a_n)(a_1 a_{n-1}) \dots (a_1 a_2) \text{ alebo } (a_1 a_2 \dots a_n) = (a_{n-1} a_n) \dots (a_2 a_n)(a_1 a_n)$$

Permutácia je *párna* \Leftrightarrow má párny počet inverzií \Leftrightarrow dá sa rozložiť na párny počet permutácií.

Pri skladaní permutácií sa parita permutácií správa podobne ako parita celých čísel pri sčítovaní.

Úloha 6. V tejto úlohe budeme pracovať s permutáciami množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

(čiže prvkami grupy S_8) a budeme zadané permutácie aj výsledky vždy zapisovať ako súčiny disjunktných cyklov: Označme

$$\varphi = (14)(235)(78)$$

$$\psi = (234)(67)$$

$$\tau = (135)(24)(68)$$

a) Vypočítajte $(\varphi \circ \psi) \circ \tau$ a $\varphi \circ (\psi \circ \tau)$

b) Ku každej z uvedených permutácií vypočítajte inverznú permutáciu.

c) Zistite rád a paritu permutácií φ , ψ , τ a aj permutácií, ktoré sme dostali ako výsledky v predchádzajúcich častiach tejto úlohy.

Úloha 7. Pre dané permutácie určte rád, paritu, a rozklad na disjunktné cykly:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ďalej vypočítajte permutácie $\varphi\tau\psi$, φ^{-1} , τ^{-1} , ψ^{-1} .

Úloha 8. Vypočítajte $\varphi \circ \psi$ a $\psi \circ \varphi$ pre:

a) $\varphi = (14)(5678)$, $\psi = (23)(5678)$

b) $\varphi = (124)(5678)$, $\psi = (23)(5678)$.

Je niektorý z týchto prípadov príkladom nedisjunktných permutácií, ktoré komutujú?

Úloha 9. Dokážte, že grupa S_n je generovaná:

a) Množinou všetkých transpozícií.

b) Množinou transpozícií $\{(12), (13), \dots, (1n)\}$.

c) Množinou transpozícií $\{(12), (23), \dots, (n-1, n)\}$.

d) Transpozíciou (12) a cyklom $(12 \dots n)$. (Hint: Skúste vyrátať $(12 \dots n)^{-k}(12)(12 \dots n)^k$.)

Úloha 10. Nech $\sigma = (a_1 a_2 \dots a_n)$ je cyklus, ako vyzerá permutácia $\tau\sigma\tau^{-1}$?

Všeobecnejšie, ako poznám počet a dĺžky cyklov v rozklade permutácie φ , viem niečo povedať o rozklade permutácie $\tau\varphi\tau^{-1}$ na disjunktné cykly.