Normálne podgrupy

Úloha 1. Ak H je podgrupa G a $[G : H] = 2$, tak H je normálna podgrupa. Navyše, pre každý prvok $x \in G$ platí $x^2 \in H$.

Úloha 2. Dokážte, že ak H je normálna podgrupa G a $[G : H] = n$, tak $x^n \in H$ pre ľubovoľné $x \in G$. Ukážte na príklade, že toto tvrdenie nemusí platiť, ak H nie je normálna.

Úloha 3. Centrom grupy G nazývame množinu $Z(G) = \{x \in G; (\forall g \in G) gx = xg\}$ takých prvkov grupy, ktoré komutujú so všetkými prvkami G. Ukážte, že $Z(G)$ je normálna podgrupa grupy G.

Úloha 4. Dokážte, že prienik (ľubovoľného systému) normálnych podgrúp danej grupy G je opäť normálna podgrupa G.

Faktorové grupy

Ak H je normálna podgrupa grupy G, tak na množine G/H tried rozkladu sa dá zadefinovať binárna operácia predpisom

$$(aH)(bH) = (ab)H.$$

Takto dostaneme *faktorovú grupu* grupy G podľa podgrupy H.

Veta o izomorfizme: Ak $f: G \to G'$ je homomorfizmus grúp, tak $\operatorname{Ker} f$ je normálna podgrupa grupy G a faktorová grupa $G/\operatorname{Ker} f$ je izomorfná s podgrupou $\operatorname{Im} f$ grupy G'.

$$G/\operatorname{Ker} f \cong \operatorname{Im} f$$

Úloha 5. Viete ukázať, že pre dané grupy platí $G/H \cong G'$? (Oplatí sa rozmyslieť si, ako sa to dá urobiť priamo pomocou definície faktorovej grupy a a aj ako sa dá využiť veta o izomorfizme.)
a) $G = (\mathbb{Z}, +)$, $H = n\mathbb{Z} = \{nk; k \in \mathbb{Z}\}$; $G' = (\mathbb{Z}_n, \oplus)$
b) $G = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$, $H = \{(x, y); 2y = 3x\}$; $G' = (\mathbb{R}, +)$
c) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, $H = \mathbb{R}$; $G' = (S, \cdot)$
d) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, $H = S$; $G' = (\mathbb{R}^+, \cdot)$
V príkladoch o komplexných číslach ako S označujeme množinu $\{x \in \mathbb{C}; |x| = 1\}$, t.j. *jednotkovú kružnicu* v komplexnej rovine.

Úloha 6. Nech G je grupa všetkých regulárnych matíc typu $n \times n$ (s operáciou násobenia matíc). Ako H označme tie z nich, ktoré majú determinant $|A| = 1$. Dokážte, že H je invariantná podgrupa G. Vedeli by ste nájsť grupu izomorfnú s G/H?

Úloha 7. Overte, či H je normálna podgrupa grupy G a opíšte faktorovú grupu G/H (aké má triedy, vybrať z každej triedy práve jedného reprezentanta, zistiť, či je izomorfná s nejakou známou grupou).
a) $G = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$, $H = \{(x, y); x + 2y = 0\}$
b) $G = (\mathbb{C}, +)$, $H = \mathbb{R}$

c) $G = (\mathbb{Z}, +)$, $H = 4\mathbb{Z} = \{4z; z \in \mathbb{Z}\}$
d) $G = (\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6, +)$, $H = [(2,2)]$
e) $G = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$, $H = \{(n, m, 0); n, m \in \mathbb{Z}\}$
f) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, $H = \{c \in \mathbb{C}; c^6 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$

Úloha 8. Zistite, či dané grupy sú izomorfné. V celom cvičení budeme ako S označovať grupu $(\{c \in \mathbb{C}; |c| = 1\}, \cdot)$ (prípadne množinu prvkov tejto grupy) a $C_n = (\{c \in \mathbb{C}; c^n = 1\}, \cdot)$
a) $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)/\{c \in \mathbb{C}; c^n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)/\mathbb{R}^+$ (pod $\mathbb{R}^+$ tu myslíme kladné reálne čísla, čiže $0 \notin \mathbb{R}^+$), S
b) $(\mathbb{R}, +)/\mathbb{Z}$, S/C_n, S
c) $(C \setminus \{0\}, \cdot)$, $(C \setminus \{0\}, \cdot)/C_n$
d) $(\{c \in \mathbb{C}; c^n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}, \cdot)/\mathbb{R}^+$, C_n
e) $(\{c \in \mathbb{C}; c^n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}, \cdot)/C_n$, $\mathbb{R}^+$
f) C_{12}/C_4, $\mathbb{Z}_3$
g) $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, +)/(\mathbb{Z}_2 \times \{0\})$, $\mathbb{Z}_3$
h) $S_3/[(123)]$, $(\mathbb{Z}_2, +)$

Úloha 9. Ukážte, že $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (obe grupy berieme so sčitovaním) je nekonečná grupa, v ktorej má každý prvok konečný rád.

Úloha 10. Centrom grupy G nazývame množinu $Z(G) = \{g \in G; (\forall h \in G) gh = hg\}$ takých prvkov, ktoré komutujú so všetkými prvkami G. Ukážte, že $Z(G)$ je normálna podgrupa grupy G.

Úloha 11. Nech H je normálna podgrupa G, $\varphi\colon G \to G/H$ je kanonický homomorfizmus a $X \subset G$. Dokážte: Ak $\varphi[X]$ generuje G/H, tak $H \cup X$ generuje G.

Úloha 12. Nech $f\colon G \to G'$ je surjektívny homomorfizmus a $H = \operatorname{Ker} f$. Ukážte, že:
a) Prvky $x, x' \in G$ patria do tej istej triedy rozkladu grupy G podľa podgrupy H práve vtedy, keď
$$f(x) = f(x').$$
b) Množina tried rozkladu grupy G podľa podgrupy H sa rovná
$$\{f^{-1}(y); y \in G'\}.$$
(T.j. triedy sú presne vzory jednoprvkových podmnožín G'.)

Kongruencie

Nech $(G, \cdot)$ je grupa. Relácia ekvivalencie $\sim$ na množine G sa nazýva *kongruencia,* ak pre ľubovoľné $x_{1,2} \in G$, $y_{1,2} \in G$ platí
$$x_1 \sim y_1, x_2 \sim y_2 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 \cdot x_2 \sim y_1 \cdot y_2. \tag{1}$$

Úloha 13. Dokážte: Nech $(G, \cdot)$ je grupa a $\sim$ je grupová kongruencia. Potom pre ľubovoľné prvky $x, y \in G$ také, že $x \sim y$ platí aj $x^{-1} \sim y^{-1}$.

$$(\forall x, y \in G) x \sim y \Rightarrow x^{-1} \sim y^{-1}$$

Úloha 14. Ukážte, že ak $\sim$ je kongruencia na grupe G, tak $H = [e]$ je normálna podgrupa grupy G.

Poznamenajme, že pre kongruenciu môžeme zaviesť na množine $G/\sim$ (t.j. na množine tried ekvivalencie) binárnu operáciu predpisom

$$[a] \cdot [b] = [a \cdot b]$$

a dostaneme takto grupu. (Toto nám iný pohľad na faktorové grupy. Viac detailov je v poznámkach na stránke.)

Úloha 15. Ukážte, že pre ľubovoľnú normálnu podgrupu H grupy G predpis

$$x \sim y \qquad \Leftrightarrow \qquad xy^{-1} \in H$$

definuje reláciu kongruencie na grupe G a že pre túto reláciu platí $H = [e]$.

Úloha 16. Ukážte, že pre každý grupový homomorfizmu $f \colon G \to G'$ podmienka

$$x \sim y \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) = f(y)$$

definuje reláciu kongruencie na grupe G a že pre túto reláciu platí $[e] = \operatorname{Ker} f$.