Okruhy – základné vlastnosti, homomorfizmy

Úloha 1. Ukážte, že ak $(R_1, +, \cdot)$ a $(R_2, +, \cdot)$ sú okruhy, tak $R_1 \times R_2$ tvorí s operáciami definovanými po zložkách

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$
$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2)$$

tiež okruh.

Kedy bude tento okruh komutatívny? Kedy to bude okruh bez deliteľov nuly?

Úloha 2. Nech R je okruh a M je neprázdna množina. Označme ako R^M množinu všetkých zobrazení $M \to R$ a definujme na nej operácie

$$(f + g)(i) = f(i) + g(i),$$
$$(f \cdot g)(i) = f(i) \cdot g(i).$$

Ukážte, že $(R^M, +, \cdot)$ je okruh. Kedy bude tento okruh komutatívny? Kedy to bude okruh bez deliteľov nuly?

Úloha 3. Ak R je obor integrity a $x^2 = 1$, tak $x = 1$ alebo $x = -1$.

Úloha 4. Je každý podokruh poľa okruh bez deliteľov nuly? Je každý podokruh poľa obsahujúci 1 oborom integrity?

Úloha 5. Dokážte, že $\{(r, r); r \in R\}$ je podokruh okruhu $R \times R$. Je tento podokruh izomorfný s okruhom R?

Úloha 6. Zistite, ktoré z nasledujúcich zobrazení sú homomorfizmy medzi okruhom A všetkých matíc typu 2×2 s celočíselnými koeficientami a okruhom $\mathbb{Z}$.

a) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a$

b) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a + d$ (*stopa* matice)

c) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ad - bc$ (determinant matice)

Úloha 7. Dokážte, že okruhy $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ a $(3\mathbb{Z}, +, \cdot)$ nie sú izomorfné.

Úloha 8. Prienik ľubovoľného systému podokruhov je podokruh. Prienik ľubovoľného systému ideálov je ideál.

Úloha 9. Nech $X \neq \emptyset$ je ľubovoľná neprázdna množina. Dokážte, že potenčná množina $(P(X), \triangle, \cap)$ s operáciami $\triangle$ (symetrická diferencia množín) a $\cap$ (prienik množín) tvorí okruh. Nájdite izomorfizmus medzi týmto okruhom a okruhom $\mathbb{Z}_2^X$. (Poznámka: Bijekcia, ktorú nájdete v druhej časti, by sa dala použiť aj na dôkaz tvrdenia uvedeného v prvej časti.)

Úloha 10. Okruh R sa volá boolovský okruh, ak pre každé $a \in R$ platí $a^2 = a$. Dokážte, že každý boolovský okruh je komutatívny. (Boolovským okruhom je napríklad okruh $(P(X), \triangle, \cap)$ z predošlej úlohy.)

Úloha 11. Nech R je komutatívny okruh s jednotkou. Dokážte, že v ňom platí binomická veta

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times a^k b^{n-k}.$$

Ideály, faktorové okruhy

Na pripomenutie: Veta o izomorfizme platí pre okruhy v rovnakom znení ako pre grupy (iba normálne podgrupy sa nahradia ideálmi). T.j. ak $f\colon R_1 \to R_2$ je surjektívny okruhový homomorfizmus, tak $\operatorname{Ker} f$ je ideál a $R_1/\operatorname{Ker} f \cong R_2$.
Ak R je komutatívny okruh s jednotkou a I je ideál v R, tak:
- R/I je pole práve vtedy, keď I je maximálny ideál.
- R/I je oborom integrity práve vtedy, keď I je vlastný prvoideál.
- Každý maximálny ideál je prvoideál.

Úloha 12. Nech F je pole a $A \neq \emptyset$. Nech Dokážte, že v okruhu F^A je každý ideál tvaru $M_p = \{f \in F^A; f(p) = 0\}$, kde p je nejaký prvok z A, maximálny. (Hint: Je faktorový okruh poľom?) [1]

Úloha 13. Ak pre každé $n \in \mathbb{N}$ je I_n ideál v okruhu R a navyše platí $I_n \subseteq I_{n+1}$, tak aj zjednotenie $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ je ideál v R.

Úloha 14. Nech R je ľubovoľný komutatívny okruh s jednotkou a $a \in R$. Potom množina $\{ax; x \in R\}$ je ideál v R, ktorý obsahuje prvok a. Tento ideál označujeme (a) a takéto ideály nazývame hlavné.

Úloha 15. Zistite, s akými okruhmi sú izomorfné okruhy $\mathbb{Z}_{60}/(15)$, $\mathbb{Z}_{60}/(20)$, $\mathbb{Z}_{60}/(12)$.

Úloha 16. Ak I_1, I_2 sú ideály v okruhu $(R, +, \cdot)$, tak aj
a) $I_1 + I_2 = \{a + b; a \in I_1, b \in I_2\}$ je ideál v R.
b) $I_1 \cdot I_2 = \{a_1b_1 + \cdots + a_nb_n; n \in \mathbb{N}, a_i, b_i \in R\}$ je ideál v R.

Úloha 17. Nech $(G, *)$ je cyklická grupa, a je jej generátor, t.j. $G = [a]$. Ak definujeme operáciu $\cdot$ ako $a^k \cdot a^l = a^{k \cdot l}$ (pre ľubovoľné $k, l \in \mathbb{Z}$), tak $(G, *, \cdot)$ je okruh. Viete povedať (v závislosti od rádu generátora a) s akým okruhom je tento okruh izomorfný?

[1] Riešenie tejto úlohy sa dá nájsť aj na fóre: `https://msleziak.com/forum/viewtopic.php?t=444`. (Samozrejme, aj tak určite odporúčam zamyslieť sa nad touto úlohou samostatne – a na riešenie, ktoré nájdete na fóre alebo niekde inde sa pozrieť až potom.)