Okruhy a ideály

Úloha 1. Ukážte, že v okruhu $\mathbb{Z}[x]$ tvorí množina

$$(2,x) = \{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]; a_0 \in 2\mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{Z} \text{ pre } i \geq 1\}$$

ideál, ktorý nie je hlavný. (Teda $\mathbb{Z}[x]$ nie je OHI.)

Úloha 2. Ukážte, že

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi; a, b \in \mathbb{Z}\}$$

s obvyklým sčitovaním a násobením tvorí obor integrity.

Úloha 3. Ukážte, že pre ľubovoľné $x \in \mathbb{C}$ existuje $a \in \mathbb{Z}[i]$ také, že $|a-x|^2 \in \mathbb{C}$.

Úloha 4*. Ukážte, že $\mathbb{Z}[i]$ je euklidovský okruh. Konkrétne ak vezmeme $N(x) = |x|^2$, tak pre $a, b \in \mathbb{Z}[i]$ pri $b \neq 0$ dostaneme

$$a = qb + r$$

tak, že zvolíme q čo najbližšie k podielu $\frac{a}{b}$. (Tak ako v predošlej úlohe.) Potom r bude spĺňať $N(b) < N(r)$.

Polynómy

Úloha 5. Nech F je pole. Ukážte, že pre polynómy $f(x) \in F[x]$ stupňa 2 alebo 3 platí: Ak $f(x)$ nemá koreň v F, tak je ireducibilný v $F[x]$.

Úloha 6. Nájdite rozklad polynómu $f(x) = x^4 + 1$ na ireducibilné polynómy nad $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

Úloha 7. Dokážte: Ak $a + bi$ je koreň polynómu $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ a $b \neq 0$, tak $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 \mid f(x)$.

Úloha 8. Nájdite všetky ireducibilné polynómy nad $\mathbb{Z}_2$ stupňov 2,3,4.

Úloha 9. Nájdite rozklad $f(x)$ na ireducibilné polynómy v $F[x]$.
a) $f(x) = 4x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 4x + 6$, $F = \mathbb{Z}_7$
b) $f(x) = x^4 - 1$, $F = \mathbb{Z}_{11}$
c) $f(x) = x^4 - 1$, $F = \mathbb{Z}_{13}$

Úloha 10. Rozložiť na koreňové činitele (nad $\mathbb{C}$):
a) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$,
b) $x^4 + 4$,
c) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 1$,
d) $x^4 - 10x^2 + 1$,
e) $x^4 - 4x^3 + 4x - 1$.

Úloha 11. Rozložiť na súčin ireducibilných polynómov nad $\mathbb{R}$:
a) $x^4 + 4$
b) $x^6 + 27$
c) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 1$
d) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$