

Permutácie

3. marca 2025

Permutácie

Bijekcie $M \rightarrow M$, kde M je konečná množina.

Zápis pre $M = \{1, 2, \dots, n\}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix}$$

Permutácie

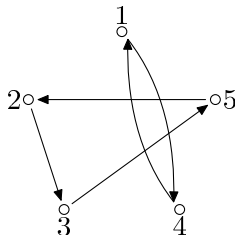


Figure: Príklad permutácie 5-prvkovej množiny. Vidíme, že z každého prvku vychádza aj do každého prvku vchádza práve jedna šípka.

Permutácie

- ▶ skladanie $\varphi \circ \tau$
- ▶ inverzná permutácia φ^{-1}
- ▶ Symetrická grupa $(S_n, \circ)$.

Cykly

Definícia

Permutáciu φ konečnej množiny M nazveme *cyklus*, alebo *cyklická permutácia* ak existujú prvky $a_1, a_2, \dots, a_k$ také, že

$$\begin{cases} \varphi(a_i) = a_{i+1} \text{ pre } i = 1, 2, \dots, k-1, \\ \varphi(a_k) = a_1, \\ \varphi(a) = a \text{ pre ostatné prvky } a \neq a_i. \end{cases}$$

Pre cyklus tohto tvaru budeme používať zápis $(a_1 a_2 \dots a_k)$.

V definícii cyklu pripúšťame aj nulový počet prvkov. *Prázdny cyklus*, ktorý označujeme $()$, sa rovná identickej permutácii.

Cykly

$$\varphi = (14) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\tau = (235) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\tau = (235) = (352) = (523)$$

$$\tau^{-1} = (253)$$

Disjunktné permutácie

Definícia

Dve permutácie φ a τ tej istej množiny M nazveme *disjunktné*, ak pre každý prvok $a \in M$ platí $\varphi(a) = a$ alebo $\tau(a) = a$. (Teda každý prvok zostáva nezmenený pri aspoň jednej z týchto dvoch permutácií.)

Lema

Ak φ a τ sú disjunktné permutácie, tak

$$\varphi \circ \tau = \tau \circ \varphi.$$

Rozklad na cykly

Tvrdenie

Každú permutáciu možno zapísať ako zloženie disjunktných cyklov. Tento zápis je jednoznačný až na poradie cyklov (a vynechanie prázdneho cyklu a jednoprvkových cyklov). Nazývame ho rozklad permutácie na súčin disjunktných cyklov.

Rád permutácie

Definícia

Ak φ je permutácia konečnej množiny M , tak *řád permutácie* φ je najmenšie prirodzené číslo $n \geq 1$ také, že

$$\varphi^n = id_M.$$

Rád permutácie

Lema

Rád cyklu je rovný jeho dĺžke, t.j. ak $\varphi = (a_1 \dots a_n)$, tak rád φ je rovný n .

Veta

Rád permutácie je najmenší spoločný násobok dĺžok disjunktných cyklov, ktoré vystupujú v jej rozklade.

Parita permutácie

Definícia

Dvojica $(\varphi(k), \varphi(s))$ sa volá *inverzia* permutácie φ , ak $k < s$ ale $\varphi(k) > \varphi(s)$.

Ak má permutácia φ párny počet inverzií, hovoríme, že je to *párna permutácia*, v opačnom prípade hovoríme o *nepárnej permutácii*.

Parita permutácie

Tvrdenie

Každú permutáciu možno zapísať ako zloženie transpozícií. Navyše, pri každom takomto zápise je parita počtu transpozícií rovná parite permutácie. (Teda permutácia je párna práve vtedy, keď ju je možné získať zložením párneho počtu transpozícií. Permutácia je nepárna práve vtedy, keď sa dá dostať zložením nepárneho počtu transpozícií.)

Parita permutácie

$$(a_1 a_2 \dots a_n) = (a_1 a_n)(a_1 a_{n-1}) \dots (a_1 a_2)$$

$$\psi = \varphi \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ \varphi(1) & \dots & \varphi(i) & \dots & \varphi(j) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix} (ij) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ \varphi(1) & \dots & \varphi(j) & \dots & \varphi(i) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix}$$