Grupy, podgrupy

Úloha 1. Zistite, či $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \square)$, kde pre každé $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ definujeme $(a, b)\square(c, d) = (2ac, b + d)$, je grupa.

Úloha 2. Nech $(G, *_G)$ a $(H, *_H)$ sú grupy. Ukáže, množina $G \times H$ spolu s operáciou $*$ definovanou ako

$$(g_1, h_1) * (g_2, h_2) = (g_1 *_G g_2, h_1 *_H h_2)$$

tvorí grupu.

Úloha 3. Nech $(G, \cdot)$ je grupa a $P(G)$ je systém všetkých podmnožín G. Dokážte, že operácia $\cdot$ na množine $P(G)$ daná predpisom

$$A \cdot B = \{a \cdot b; a, b \in G\}$$

je asociatívna. Tvorí $P(G) \setminus \{\emptyset\}$ s touto operáciou grupu? Ak nie, viete zistiť či existuje neutrálny prvok a pre ktoré prvky existuje inverzný prvok?

Úloha 4. Dokážte, že matice typu $n \times n$ nad poľom $\mathbb{R}$, ktorých determinant je rovný 1, s operáciou násobenia matíc, tvoria grupu.

Úloha 5. Matice typu $n \times n$, ktoré v každom riadku a každom stĺpci majú práve jednu jednotku a ostatné prvky sú nulové, s operáciou násobenia matíc tvoria grupu. (Hint: Súvisia tieto matice nejako s permutáciami? Akým lineárnym zobrazeniam zodpovedajú?)

Úloha 6. Ak A, B, C sú podgrupy G a $C \subseteq A \cup B$, tak $C \subseteq A$ alebo $C \subseteq B$.

Úloha 7. Doplňte nasledujúcu tabuľku

	a	b	c	d
a				
b				d
c			d	
d				

tak aby ste dostali grupu.

Úloha 8*. Nech G je grupa a $a, b \in G$. Nech pre tieto prvky platia rovnosti $aba = ba^2b$, $a^3 = e$ a pre nejaké $n \in \mathbb{N}$ platí $b^{2n-1} = e$. Dokážte, že $b = e$. (Hint vedeli by ste ukázať $ab^2 = b^2a$? Dá sa to ďalej použiť na dôkaz, že pre tieto prvky platí $ab = ba$?)

Podgrupy a homomorfizmy

Úloha 1. Budeme pracovať v grupe $(\mathbb{R},+)$.
a) Dokážte, že $[\{2,3\}]=\mathbb{Z}$;
b) Dokážte, že $[\{1,\sqrt{2}\}]=\{a+b\sqrt{2}; a,b\in\mathbb{Z}\}$.
c*) Je možné podgrupu $[\{1,\sqrt{2}\}]$ generovať jediným prvkom? (V terminológii, ktorú na prednáške ešte len zavedieme sa dá táto otázka sformulovať takto: Je podgrupa $[\{1,\sqrt{2}\}]$ cyklická?)

Úloha 2. Ukážte, že $H=\{\frac{m}{n}; m,n$ sú nepárne$\}$ je podgrupa grupy $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$.

Úloha 3. Tvorí daná podmnožina podgrupu danej grupy:
a) $\mathbb{N}$ v $(\mathbb{Z},+)$;
b) $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ v $(\mathbb{R}^2,+)$;
c) $\{z\in\mathbb{C}; z^5=1\}$ v $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$;
d) $\{id, \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{smallmatrix}\right)\}$ v $(S_3,\circ)$;
e) $\{\left(\begin{smallmatrix}a&b\\-b&a\end{smallmatrix}\right); a,b\in\mathbb{R}, (a,b)\neq(0,0)\}$ v grupe všetkých regulárnych matíc 2×2 s operáciou násobenia matíc.

Úloha 4. Ak A,B,C sú podgrupy G a $C\subseteq A\cup B$, tak $C\subseteq A$ alebo $C\subseteq B$.

Úloha 5. Nájdite príklad nekonečnej grupy, ktorá obsahuje netriviálnu konečnú podgrupu. (Pod netriviálnou podgrupou tu rozumieme podgrupu, ktorá má viac ako jeden prvok.)

Úloha 6. Nájdite všetky podgrupy grupy $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ (súčin dvoch grúp sme definovali na minulom cvičení) a všetky podgrupy grupy $\mathbb{Z}_4$ (v oboch prípadoch operácia $\oplus$). Majú tieto grupy rovnaký počet dvojprvkových podgrúp? Dá as to nejako použiť na zdôvodnenie, že tieto dve grupy nie sú izomorfné?

Úloha 7. Nech V je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{R}$. Je aj každá podgrupa grupy $(V,+)$ podpriestorom priestoru V? Ako je to s vektorovými priestormi nad poľom $\mathbb{Z}_p$?

Úloha 8. Nech H je podgrupa grupy G. Nech $g\in G$. Ukážte, že $gHg^{-1}=\{ghg^{-1}; h\in H\}$ je podgrupa grupy G.

Úloha 9. Ukážte, že ak G je grupa a $a\in G$, tak zobrazenie $f_a\colon G\to G$ definované ako $f_a(x)=axa^{-1}$ je izomorfizmus.

Úloha 10. Dokážte, že $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$ s operáciou $*$ definovanou ako $(a,b)*(c,d)=(ac-bd, ad+bc)$ tvorí grupu. (Hint: Dalo by sa nájsť jednoduché riešenie s pomocou niektorej grupy z úlohy 2 alebo pomocou inej známej grupy?)

Homomorfizmy a izomorfizmy

Na pripomenutie: Homomorfizmus $f\colon (G,\circ) \to (H,*)$

$$f(g_1 \circ g_2) = f(g_1) * f(g_2)$$

Bijektívny homomorfizmus voláme izomorfizmus (injektívny homomorfizmus voláme monomorfizmus, surjektívny homomorfizmus voláme epimorfizmus).

Ak existuje izomorfizmus $f\colon (G,*) \to (H,\circ)$, tak hovoríme, že grupy G a H sú izomorfné, označujeme $(G,*) \cong (H,\circ)$ resp. $G \cong H$. Ak existuje epimorfizmus $f\colon (G,*) \to (H,\circ)$, tak hovoríme, že grupa H je homomorfným obrazom grupy G.

Úloha 1. Pre dané grupy G, H a zobrazenie $f\colon G \to H$ overte, či f je homomorfizmus. Zistite aj, či je dané zobrazenie injektívne, surjektívne, bijektívne.
a) $G = H = (\mathbb{Z},+)$, $f(x) = x+1$
b) $G = (\mathbb{R},+)$, $H = (\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$, $f(x) = x$
c) $G = (\mathbb{Z},+)$, $H = (\{\pm 1\},\cdot)$ a zobrazenie f je definované ako

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ak } x \text{ je párne,} \\ -1 & \text{ak } x \text{ je nepárne.} \end{cases}$$

d) $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) = \{A \in M_{2,2}(\mathbb{R}), \det(A) \neq 0\}$ (t.j. regulárne matice) s operáciou násobenia matíc, $H = (\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$, $f(A) = \det(A)$
e) $G = (\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$, $H = (\mathbb{Q}^+,\cdot)$, $f(x) = |x|$
f) $G = (\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$, $H = (\mathbb{Q}^+,\cdot)$, $f(x) = x^2$

Úloha 2. a) Dokážte, že $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$ s operáciou $*$ definovanou ako $(a,b)*(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$ tvorí grupu.
b) Dokážte, že všetky nenulové matice tvaru $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right)$ tvoria s násobením matíc grupu. (Hint k obom častiam úlohy: Možno vám pomôže nájsť jednoduchšie riešenie to, že táto úloha je v časti o homomorfizmoch.)

Úloha 3. Zistite, či sú grupy G a H izomorfné:
a) $G = (\mathbb{Z}_6,\oplus)$, $H = (S_3,\circ)$
b) $G = (\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)\times(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$, $H = (\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$
c) $G = (\mathbb{Z}_6,\oplus)$, $H = (\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3,\oplus)$
d) $G = (\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$, $H = (\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$
e) $G = (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2,+)$, $H = (\mathbb{Z},+)$ (Sčitovanie v $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2$ chápeme tak, že na prvej súradnici používame obvyklé sčitovanie a na druhej sčitujeme modulo 2, t.j. tak ako sme definovali priamy súčin grúp.)

Úloha 4. Zistite, či sú grupy G a H izomorfné a či je grupa H homomorfným obrazom grupy G. Svoju odpoveď zdôvodnite!
a) $G = (\mathbb{R},+)\times(\mathbb{R},+)$, $H = (\mathbb{C},+)$
b) $G = (\mathbb{Q},+)$, $H = (\mathbb{R},+)$
c) $G = (\mathbb{Q},+)$, $H = (\mathbb{Q}^+,\cdot)$
d) $G = (\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$, $H = (\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$
d) $G = (\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$, $H = (\mathbb{R}^+,\cdot)$
f) $G = (\mathbb{Q},+)$, $H = (\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$

Úloha 5. Zistite, či sú grupy G a H izomorfné a či je niektorá z nich homomorfným obrazom druhej. Svoju odpoveď zdôvodnite!
a) $G = (\mathbb{R}, +)$, $H = (\mathbb{R}^+, \cdot)$
b) $G = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $H = (\mathbb{R}^+, \cdot)$
c) $G = (\mathbb{Z}_4, \oplus)$, $H = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \oplus)$

Úloha 6. Nech H je podgrupa grupy G. Nech $g \in G$. Ukážte, že $gHg^{-1} = \{ghg^{-1}; h \in H\}$ je podgrupa grupy G.

Úloha 7. Nech $(G, \circ)$ je grupa. Je zobrazenie $g \mapsto g^{-1}$ izomorfizmus z G na G? Ak nie, vedeli by ste definovať binárnu operáciu $*$ na G, tak, aby toto zobrazenie bol izomorfizmus grúp $(G, \circ)$ a $(G, *)$? Je uvedené zobrazenie izomorfizmom, ak G je komutatívna?

Úloha 8. Nech $f\colon G \to H$ je homomorfizmus grúp. Dokážte:
a) Zobrazenie f je surjektívne práve vtedy, keď $\operatorname{Im} f = H$.
b) Zobrazenie f je injektívne práve vtedy, keď $\operatorname{Ker} f = \{e\}$.

Úloha 9. Nech G je grupa, $a \in G$. Dokážte, že zobrazenie $f_a\colon G \to G$ definované predpisom $f_a(x) = axa^{-1}$ je izomorfizmus.

Úloha 10. Nech $a, b \in G$, kde G je grupa, $a, b \neq e$, pričom platí $ab = ba$ a $b^3 = e$. Dokážte, že $\{a^n, ba^n, b^2a^n; n \in \mathbb{Z}\}$ je podgrupa grupy G.

Úloha 11. Nech $f\colon (G, *) \to (H, \circ)$ je homomorfizmus. Dokážte, že potom platí:
a) $f(a^n) = f(a)^n$
b) $a^n = e_G \Rightarrow f(a)^n = e_H$
c) Ak f je navyše izomorfizmus, tak $a^n = e_G \Rightarrow f(a)^n = e_H$.
d) Izomorfizmus zachováva rád prvku, t.j. rád prvku a v grupe G je rovnaký ako rád prvku $f(a)$ v grupe H.
e) Viete niečo povedať o vzťahu medzi rádmi prvkov a a $f(a)$ aj ak f je homomorfizmus? (T.j. bez predpokladu o bijektívnosti.)