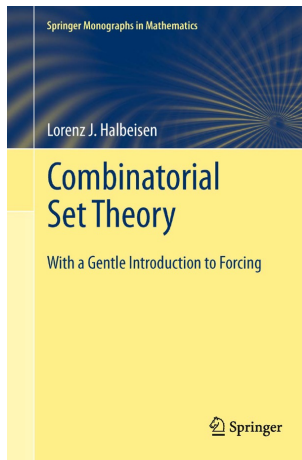
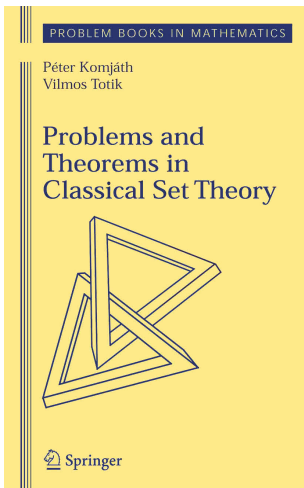


Aplikácie teórie množín

16. februára 2023

Literatúra



Témy

- ▶ Zornova lema
- ▶ ordinály a transfinitná indukcia

Hodnotenie

- ▶ 40 bodov – úloha na Zornovu lemu
- ▶ 40 bodov – úloha na transfinitnú indukciu
- ▶ 20 bodov – iné (ďalšie úlohy z textu, d.ú., aktivita)

Matematická indukcia

Keď niekoho chceme naučiť matematickú indukciu:

- ▶ Prečo platí?
- ▶ Čo by bol dôkaz, že na \mathbb{N} funguje matematická indukcia?
- ▶ Je dôkaz dôležitý?

Matematická indukcia

- ▶ „Očividný“ fakt – základná vlastnosť \mathbb{N} .
- ▶ Princíp dobrého usporiadania
- ▶ Peanove axiómy
- ▶ Konštrukcia prirodzených čísel v ZF resp. v ZFC.

Matematická indukcia

Používanie matematickej indukcie:

- ▶ Úplná indukcia.
- ▶ Silnejšie tvrdenie.
- ▶ Cauchyho indukcia

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$$

- ▶ Výber premennej (napríklad m , n , $m + n$, $\max\{m, n\}$)

$$F_{m+n} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n$$

Matematická indukcia

Používanie matematickej indukcie:

- ▶ Zápis a terminológia (báza indukcie, indukčný krok).
- ▶ Poznať veci, ktoré používame.

Cauchyho funkcionálna rovnica

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) f(x + y) = f(x) + f(y) \quad (1)$$

Cauchyho funkcionálna rovnica

$$f(0) = 0$$

$$f(-x) = -f(x)$$

$$f(2x) = 2f(x)$$

$$(\forall k \in \mathbb{Z})(\forall x \in \mathbb{R})f(kx) = kf(x)$$

$$(\forall r \in \mathbb{Q})(\forall x \in \mathbb{R})f(rx) = rf(x) \tag{2}$$

Cauchyho funkcionálna rovnica

Spojité riešenia:

$$f(x) = ax$$

Nespojité riešenia:

- ▶ Hustý graf.
- ▶ Nie sú merateľné.

Cauchyho funkcionálna rovnica

$$f(a + b\sqrt{2}) = af(1) + bf(\sqrt{2})$$

$$D(f) = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$$

Cauchyho funkcionálna rovnica

$$f: M_n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots \subseteq M_n \subseteq \dots$$

$$M_\omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} M_n$$

$$M_\omega \subseteq M_{\omega+1} \subseteq \dots \subseteq M_{\omega+\omega} \subseteq \dots$$