

Dobre usporiadané množiny

24. februára 2021

Dobre usporiadané množiny

Definícia

Nech (A, \leq) je čiastočne usporiadaná množina. Hovoríme, že (A, \leq) je *dobre usporiadaná množina*, resp. že \leq je *dobré usporiadanie* na množine A , ak každá neprázdna podmnožina množiny A má najmenší prvok v usporiadaní \leq .

Indukcia v DUM

Definícia

Ak (A, \leq) je lineárne usporiadaná množina, tak symbolom A_a budeme označovať množinu všetkých prvkov menších než a .

$$A_a = \{x \in A; x < a\}$$

Veta (Indukcia v dobre usporiadanej množine)

Nech (A, \leq) je dobre usporiadaná množina. Nech podmnožina $B \subseteq A$ má nasledujúcu vlastnosť:

$$(\forall a \in A) A_a \subseteq B \Rightarrow a \in B.$$

Potom $B = A$.

Príklady dobre usporiadaných množín

- ▶ Konečné lineárne usporiadané množiny.
- ▶ (\mathbb{N}, \leq)

Lema

Ak (A, \leq) je dobre usporiadaná množina a prvok $a \in A$ nie je maximálny, tak existuje nasledovník prvku a .

Lexikografický súčin

Definícia

Nech (A, \leq_A) , (B, \leq_B) sú čiastočne usporiadané množiny. Potom reláciu \leq na množine $A \times B$ definovanú ako

$$(a, b) \leq (a', b') \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (a <_A a') \vee [(a = a') \wedge (b \leq_B b')]$$

nazývame *lexikografické usporiadanie*. Tiež hovoríme, že $(A \times B, \leq)$ je *lexikografický súčin* čiastočne usporiadaných množín (A, \leq_A) a (B, \leq_B) .

Antilexikografické usporiadanie na $A \times B$ definujeme ako

$$(a, b) \leq (a', b') \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (b <_B b') \vee [(b = b') \wedge (a \leq_A a')].$$

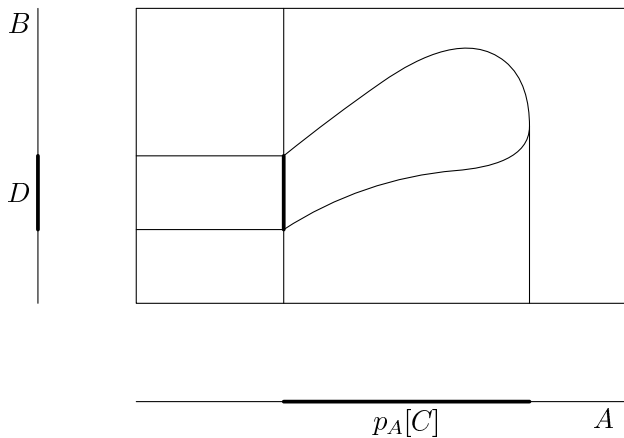
Lexikografický súčin

Tvrdenie

Nech (A, \leq) , (B, \leq) sú čiastočne usporiadané množiny a $(A \times B, \leq)$ je ich (anti)lexikografický súčin. Potom

- (i) $(A \times B, \leq)$ je čiastočne usporiadaná množina;*
- (ii) ak (A, \leq) a (B, \leq) sú lineárne usporiadané, tak aj $(A \times B, \leq)$ je lineárne usporiadaná množina;*
- (iii) ak (A, \leq) a (B, \leq) sú dobre usporiadané, tak aj $(A \times B, \leq)$ je dobre usporiadaná množina.*

Lexikografický súčin



Súčet dobre usporiadaných množín

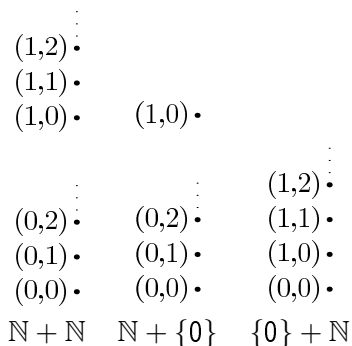
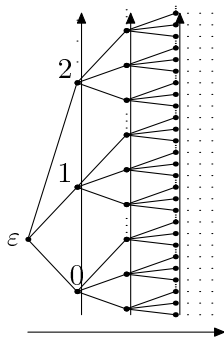


Figure: Príklady na súčet dobre usporiadaných množín

Príklady dobre usporiadaných množín



Počiatočné úseky

Definícia

Počiatočný úsek čiastočne usporiadanej množiny (X, \leq) je podmnožina $U \subseteq X$ s vlastnosťou $x \in U \wedge y \leq x \Rightarrow y \in U$.

Tvrdenie

Nech (X, \leq) je lineárne usporiadaná množina a nech $X' = \{X_a; a \in X\}$. Potom zobrazenie $f: X \rightarrow X'$ určené predpisom

$$f(a) = X_a$$

je izomorfizmus medzi čiastočne usporiadanými množinami (X, \leq) a (X', \subseteq) .

Počiatočné úseky

Tvrdenie

Nech (X, \leq) je čiastočne usporiadaná množina a nech $X' = \{X_a \cup \{a\}; a \in X\}$. Potom zobrazenie $f: X \rightarrow X'$ určené predpisom

$$f(a) = X_a \cup \{a\}$$

je izomorfizmus medzi čiastočne usporiadanými množinami (X, \leq) a (X', \subseteq) .