

Základná veta o dobre usporiadaných množinách

16. marca 2023

Monotónnosť a izomorfizmus

Pre lineárne usporiadané množiny (A, \leq_A) a (B, \leq_B) a zobrazenie $f: A \rightarrow B$:

- ▶ Zobrazenie f je *monotónne*, ak

$$(\forall a_{1,2} \in A) a_1 \leq_A a_2 \Rightarrow f(a_1) \leq_B f(a_2)$$

- ▶ Zobrazenie f je *izomorfizmus*, ak je monotónne a bijektívne.

$$(\forall a_{1,2} \in A) a_1 \leq_A a_2 \Leftrightarrow f(a_1) \leq_B f(a_2)$$

Monotónne a injektívne:

$$(\forall a_{1,2} \in A) a_1 <_A a_2 \Rightarrow f(a_1) <_B f(a_2)$$

Počiatočné úseky

Definícia

Počiatočný úsek čiastočne usporiadanej množiny (X, \leq) je podmnožina $U \subseteq X$ s vlastnosťou $x \in U \wedge y \leq x \Rightarrow y \in U$.

V dobre usporiadanej množine: celé X a množiny tvaru X_a .

Monotónne injekcie

Tvrdenie

Nech (A, \leq) je dobre usporiadaná množina a $f: A \rightarrow A$ je injektívne monotónne zobrazenie. Potom pre každé $a \in A$ platí $a \leq f(a)$.

Izomorfizmy dobre usporiadaných množín

- ▶ Nech (A, \leq) je dobre usporiadaná množina. Ak $f: A \rightarrow A$ je izomorfizmus, tak $f = id_A$.
- ▶ Ak (A, \leq) a (B, \leq) sú dobre usporiadané množiny, tak existuje najviac jeden izomorfizmus medzi A a B .
- ▶ Nech (A, \leq) je dobre usporiadaná množina, B je počiatkový úsek množiny A a $f: A \rightarrow B$ je izomorfizmus. Potom $B = A$ a $f = id_A$. (Inak povedané: Dobre usporiadaná množina nemôže byť izomorfná s vlastným počiatkovým úsekom seba samej.)

Základná veta o dobre usporiadaných množinách

Veta (Základná veta o dobre usporiadaných množinách)

Ak (A, \leq) a (B, \leq) sú dobre usporiadané množiny, tak buď (A, \leq) je izomorfná s nejakým počiatočným úsekom množiny B alebo (B, \leq) je izomorfná s nejakým počiatočným úsekom množiny A .

Porovnatel'nosť kardinalít

Dôsledok

Pre ľubovoľné dve kardinálne čísla a, b platí $a \leq b$ alebo $b \leq a$.

Dôsledok (AC)

Pre ľubovoľné množiny X, Y existuje injekcia z X do Y alebo existuje injekcia z Y do X .