

Definícia ordinálnych čísel (naivná)

27. apríla 2023

Naivný prístup k ordinálnym číslam

Definícia ordinálnych čísel:

- ▶ Naivná – typy dobre usporiadaných množín.
- ▶ Axiomatická (v ZFC) – Von Neumannova definícia

Porovnanie s kardinálmi

- ▶ Vieme povedať, čo znamená $|A| = |B|$, $|A| \leq |B|$, $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$.
- ▶ Ale nepovedali sme aká množina je \aleph_0 alebo aká množina je $|A|$.
- ▶ Vieme „preložiť“ $a^{b \cdot c} = (a^b)^c$ ako vzťah medzi množinami $A^{B \times C}$ a $(A^B)^C$.
- ▶ Vieme „preložiť“ $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$ ako vzťah medzi množinami \mathbb{N} a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Porovnanie s kardinálmi

Tvrdenie	Preklad
$(a^b)^c = a^{b \cdot c}$	$ (A^B)^C = A^{B \times C} $
$a \cdot b = b \cdot a$	$ A \times B = B \times A $
$\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$	$ \mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \mathcal{P}(\mathbb{N}) $

$$(2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

Porovnanie s kardinálmi

- ▶ Čo je suprémum kardinálnych čísel $\sup\{a_i; i \in I\}$?

Ordinálne čísla ako ordinálne typy

- ▶ Pre dobre usporiadanú množinu máme ordinálne číslo $\alpha = \text{ot}(A, \leq)$.
- ▶ $\alpha = \beta$, ak $(A, \leq_A) \cong (B, \leq_B)$
- ▶ $\alpha \leq \beta$, ak (A, \leq_A) je izomorfné s počiatočným úsekom (B, \leq_B) .

Ordinálne čísla ako ordinálne typy

Správa sa $=$ a \leq dobre?

- ▶ Je \leq dobre definované?
- ▶ reflexívnosť a tranzitívnosť
- ▶ $\alpha \leq \beta \wedge \beta \leq \alpha \Rightarrow \alpha = \beta$ (Neexistuje izomorfizmus s vlastným počiatočným úsekom.)
- ▶ $\alpha \leq \beta \vee \beta \leq \alpha$

Ordinálne čísla ako ordinálne typy

Vieme ordinálne čísla (ordinálne typy) porovnávať. Ešte sa nám hodí:

- ▶ nasledovník;
- ▶ supréмум;
- ▶ Je to dobré usporiadanie?
- ▶ Vzťah ku kardinalite.

Nasledovník a suprémum

Ak (A, \leq) je dobre usporiadaná množina, tak pre každé $a \in A$ nastane niektorá z možností:

- ▶ $a = \min A$;
- ▶ $a = S(b)$ pre nejaké $b \in A$;
- ▶ $a = \sup\{b \in A; b < a\}$

Nasledovník a suprémum

Tvrdenie

Nech (A, \leq) je dobre usporiadaná množina a $f: A \rightarrow A$ je injektívne monotónne zobrazenie. Potom pre každé $a \in A$ platí $a \leq f(a)$.

Môžeme dokazovať indukciou na množine A .

Nasledovník a suprémum

Tvrdenie

Pre každé ordinálne číslo α existuje jeho nasledovník

$$\beta = S(\alpha) = \alpha + 1.$$

Tvrdenie

Pre každú množinu ordinálnych čísel existuje suprémum

$$\sup\{\alpha_i; i \in I\}$$

Nasledovník a suprémum

Tvrdenie

Nech pre každé $i \in I$ je (A_i, \leq_i) dobre usporiadaná množina.

Potom existuje dobre usporiadaná množina (B, \leq) taká, že každé A_i je izomorfné s počiatočným úsekom B .

Ľahká modifikácia: Každé A_i je izomorfné s vlastným počiatočným úsekom (B, \leq) .

Nasledovník a suprémum

Induktívna limita:

- ▶ Definujeme $i \leq j$ ak $\text{ot}(A_i, \leq_i) \leq \text{ot}(A_j, \leq_j)$.
- ▶ Vloženie $f_{ij}: A_i \rightarrow A_j$.
- ▶ Platí $f_{jk} \circ f_{ij} = f_{ik}$
- ▶ Na $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ (b.ú.n.v. disjunktné) definujeme

$$a \sim b \Leftrightarrow b = f_{ij}(a).$$

- ▶ Nerovnosť definujeme cez

$$[a] \leq [b] \Leftrightarrow a \leq_i b.$$

Nasledovník a suprémum

- ▶ Relácia \sim je relácia ekvivalencie.
- ▶ Máme $e_i: A_i \hookrightarrow B$ definovaná ako $e_i(a) = [a]$.
- ▶ Relácia \leq je dobré usporiadanie.
- ▶ Zobrazenie e_i je monotónne a $e_i[A_i]$ je počiatočný úsek.

Nasledovník a suprémum

Tvrdenie

Nech (A, \leq) a (B, \leq) sú dobre usporiadané množiny, pričom A je izomorfná s nejakou podmnožinou množiny B . Potom A je izomorfná s počiatočným úsekom množiny B .

Nasledovník a suprémum

Tvrdenie

Nech pre každé $i \in I$ je (A_i, \leq_i) dobre usporiadaná množina.

Potom existuje dobre usporiadaná množina (B, \leq) taká, že každé A_i je izomorfné s počiatočným úsekom B .

Pre $\{(A_i, \leq_i), i \in I\}$ teraz stačí zobrať $\sum_{i \in I} (A_i, \leq_i)$. Treba ale nejaké dobré usporiadanie na I .

Lexikografický súčet

Ak (I, \leq) a všetky (A_i, \leq_i) sú dobre usporiadané (a disjunktné),
tak $\bigcup_{i \in I} A_i$ vieme usporiadať lexikograficky

$$a \leq b \Leftrightarrow (a, b \in A_i \wedge a \leq_i b_i) \vee \\ (a \in A_i \wedge b \in b_j \wedge i \leq j)$$

Označujeme $\sum_{i \in I} (A_i, \leq_i)$.

Dobré usporiadanie na (I, \leq)

Ak $\{A_i; i \in I\}$ je množina dobre usporiadaných množín, pričom pre $i, j \in I$ platí $i \neq j \Rightarrow \text{ot}(A_i) \neq \text{ot}(A_j)$, tak predpis

$$i \leq j \Leftrightarrow A_i \text{ je izomorfné s počiatočným úsekom } A_j$$

určuje dobré usporiadanie na množine I .

$$i \leq j \Leftrightarrow \text{ot}(A_i) \leq \text{ot}(A_j)$$

Počiatočné úseky

Tvrdenie

Nech (X, \leq) je lineárne usporiadaná množina a nech $X' = \{X_a; a \in X\}$. Potom zobrazenie $f: X \rightarrow X'$ určené predpisom

$$f(a) = X_a$$

je izomorfizmus medzi čiastočne usporiadanými množinami (X, \leq) a (X', \subseteq) .

Ordinály a dobre usporiadané množiny

Tvrdenie

Nech pre každé $i \in I$ je α_i ordinálne číslo. Potom existuje dobre usporiadaná množina (B, \leq) a monotónne injektívne zobrazenie $f: (\{\alpha_i; i \in I\}, \leq) \rightarrow (B, \leq)$. Navyše pre $a_i = f(\alpha_i)$ máme $\alpha_i = \text{ot}(B_{a_i})$.

Stručne: Ľubovoľnú množinu ordinálov môžeme stotožniť s podmnožinou vhodnej dobre usporiadanej množiny.

$$\alpha_i = \text{ot}(A_i, \leq_i)$$

Ordinály a dobre usporiadané množiny

- ▶ Pre každý ordinál existuje nasledovník $S(\alpha) = \alpha + 1$.
- ▶ Pre každú množinu ordinálov existuje suprémum.
- ▶ Každá množina ordinálov je dobre usporiadaná.
- ▶ Pre každý ordinál platí $\alpha = \text{ot}(\{\beta \in \text{On}; \beta < \alpha\})$

Ordinály tvoria *vlastnú triedu* – neexistuje množina všetkých ordinálov.

Limitné ordinály

Ak $\alpha \neq 0$ a α nie je nasledovník iného ordinálu, voláme ho *Limitný ordinál*.

$$\alpha = \sup\{\beta \in \mathbf{On}; \beta < \alpha\}$$

Pre ľubovoľný ordinál α platí práve jedna z možností:

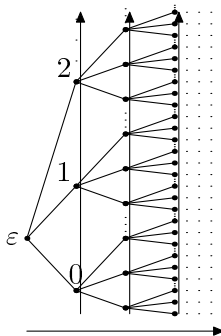
- ▶ $\alpha = 0$;
- ▶ $\alpha = S(\beta)$ pre nejaké $\beta \in \mathbf{On}$;
- ▶ α je limitný ordinál.

Ordinál ω

$$\omega = \text{ot}(N, \leq)$$

Máme potom napríklad $\omega + \omega$, $\omega \cdot \omega$, ω^ω .

ω_1 = najmenší nespočítateľný ordinál

Ordinál ω^ω 

Ordinály a kardinálnosť

Tvrdenie

Nech (A, \leq) je dobre usporiadaná množina. Potom existuje dobré usporiadanie \leq' na A také, že pre každý vlastný počiatkový úsek pri tomto usporiadaní platí

$$|A_a| < |A|.$$